



1. Übungsblatt für die Übungen vom 15.10.-19.10.2012

Wiederholung, Lineare Abbildungen

Ü1. Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen linear sind:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & \text{mit} & f_1(x) := mx + n, \\ f_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \text{mit} & f_2(x) := (x - 2, x + 1), \\ f_3 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \text{mit} & f_3(x_1, x_2) := (x_1, 0), \\ f_4 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & \text{mit} & f_4(x_1, x_2, x_3) := (2x_1 + 2x_2, 3x_2 - 2x_3, 2x_3 - x_1), \\ f_5 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \text{mit} & f_5(x_1, x_2) := (x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2). \end{aligned}$$

Ü2. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme. Ermitteln Sie auch die jeweiligen Koeffizientenmatrizen.

$$\begin{array}{lll} \text{(b)} & 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 & \text{(a)} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ & x_1 + x_2 - x_3 = 9 & x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ & 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 12 & -x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(c)} \quad x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 12 \end{array}$$

Ü3. Durch $g := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 3x + 1 \right\}$ ist eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ gegeben.

-
- (a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt zu der Geraden $h := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = -x - 3 \right\}$.
 - (b) Geben Sie g in Parameterform $\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$ an.
 - (c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Schnittpunkt zwischen den Geraden g und h .
 - (d) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{q}$ zu der Geraden g .

A4. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

Lösen Sie die folgenden beiden linearen Gleichungssysteme. Geben Sie auch die Koeffizientenmatrizen an.

Hinweis: In Teil (b) ist die Lösung in Abhängigkeit von dem Parameter $r \in \mathbb{R}$ anzugeben.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & 4a + 2b + c = 0 \\ & -2a + 3b + 6c = -1 \\ & 3a - b - 2c = -2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & 3a + b = r \\ & a + 3b = -5r \end{array}$$

H5. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann linear ist, wenn es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(v) = r \cdot v$.

H6. Zeigen Sie, dass die Seitenmittelpunkte eines beliebigen Vierecks im $\mathbb{R}^n$ ein Parallelogramm bilden. Wir setzen voraus, dass die Eckpunkte des Vierecks vier voneinander verschiedene Punkte sind, aber wir setzen nicht voraus, dass die Eckpunkte in einer Ebene liegen.

Hinweis: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn gegenüberliegende Seiten parallel und gleichlang sind. Zwei Seiten bzw. Geraden sind genau dann parallel, wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind.