

## Übung 3: sympy - Symbolisch rechnen mit Python

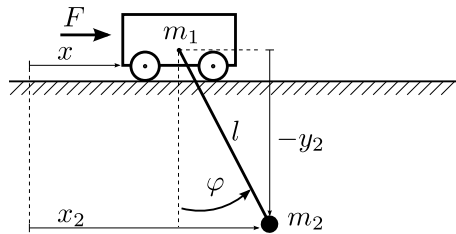
Ziel der Übung ist das Kennenlernen des Paketes SymPy am Beispiel der Herleitung der Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems („Euler-Lagrange-Gleichungen“).

### Voraussetzungen

SymPy: Symbole, Funktionen, Differenzieren, Substituieren, Gleichungen lösen

Python: Schleifen, Listen und Tupel, Dictionaries

### Betrachtetes System: 2D Kran mit fester Seillänge



Koordinaten:  $q_1 = x$ ,  $q_2 = \varphi$

konstante Parameter:  $m_1, m_2, l, g$

kin. Energie:  $T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$

pot. Energie:  $U = m_2gl(1 - \cos(\varphi))$

Lagrange-Funktion:  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T - U$

Euler-Lagrange-Gleichungen:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$   
( $i = 1, 2$ )

Äußere Kräfte u. Momente:  $Q_1 = F$ ,  $Q_2 = 0$

Die Bewegungsgleichungen sind ein DGL-System, was den Zusammenhang zwischen den zeitabhängigen Größen  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$  und  $\ddot{\varphi}(t)$  beschreibt. Die Parameter  $m_1, m_2, l$  und  $g$  werden als konstant und gegeben angenommen.

### Hinweise:

- An vorgegebenem Skript orientieren.
- `sys.exit()` beachten.  
(Quelltext danach enthält noch nicht existierende Variablen etc.)
- Möglichst aussagekräftige Variablennamen wählen.
- Physikalisches Verständnis der Aufgabe hilfreich aber nicht zwingend notwendig.  
Teilaufgaben geben Lösungsweg vor.

### Aufgaben

1. Legen Sie alle benötigten Symbole für die Parameter an.
2. Legen Sie Zeitfunktionen für  $x(t)$  und  $\varphi(t)$  an.
3. Bilden Sie die Zeitableitungen  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$  und  $\ddot{\varphi}(t)$ .
4. Berechnen Sie die geometrischen Hilfsgrößen über die Beziehungen  $x_2(t) = x(t) + l \sin \varphi(t)$ ,  $y_2(t) = -l \cos \varphi(t)$ .

5. Berechnen Sie  $T, U$  und  $L$  (Formeln siehe oben).
6. Erzeugen Sie die folgenden vier Hilfst Terme:  $\frac{\partial L}{\partial q_i}, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ , wobei  $q_1 = x$  und  $q_2 = \varphi$  gilt.  
**Hinweis:** Ein Ausdruck kann nicht nach einer *Funktion* sondern nur nach einem *Symbol* abgeleitet werden.  $\rightarrow$  Funktionen mit Hilfssymbolen substituieren.
  - (a) Führen Sie für jede der Zeitfunktionen  $x(t), \dot{x}(t), \varphi(t), \dot{\varphi}(t)$  ein (Hilfs-) Symbol ein.
  - (b) Erstellen Sie eine Liste von Tupeln `[(func1, symb1), (func2, symb2), ...]` und substituieren Sie damit in  $L$  alle Zeitfunktionen durch die jeweiligen Symbole. Beachten Sie dabei die Substitutionsreihenfolge.
  - (c) Berechnen Sie die mittels `<expr>.diff(...)` oben genannten Hilfst Terme.
7. Berechnen Sie nun  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  (zwei Terme). Beachten Sie, dass vor dem Bilden der totalen Zeitableitung die im letzten Schritt eingeführten Symbole wieder durch Zeitfunktionen ersetzt werden müssen. Erstellen Sie zu diesem Zweck zunächst eine neue Liste analog der obigen aber mit umgekehrter Reihenfolge der Terme in den Tupeln.
8. Stellen Sie nun die beiden Bewegungs-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

auf. **Hinweise:** Alle notwendigen Terme sind verfügbar. Für eine die Weiterverarbeitung der Gleichungen ist es sinnvoll, wiederum alle Zeitfunktionen (jetzt auch  $\ddot{x}(t)$  und  $\ddot{\varphi}(t)$ ) durch Symbole zu ersetzen.

9. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem nach den Beschleunigungen auf, sodass zwei Gleichungen  $\ddot{x} = \dots$  und  $\ddot{\varphi} = \dots$  resultieren (bzw. die rechten Seiten dieser Gleichungen).
10. Zeigen Sie die erhaltenen Ausdrücke für  $\ddot{x}$  und  $\ddot{\varphi}$  mittels `sp.pprint(...)` und der gegebenen Funktion `preview(...)` an.
11. Erzeugen Sie für beide Ausdrücke mittels `sp.lambdify(...)` eine Funktion zur Berechnung der jeweiligen Beschleunigung. **Hinweise:** Substituieren Sie dafür zunächst die Parameter mit folgenden numerischen Werten: `{m1:0.8, m2:0.3, l:0.5, g:9.81}`. Die Ausdrücke hängen dann nur noch von der Kraft  $F$ , den Koordinaten  $(x, \varphi)$  und den Geschwindigkeiten  $(\dot{x}, \dot{\varphi})$  ab. Diese Funktionen werden in der nächsten Übung für die Simulation des Systems benötigt.