Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof.Dr.W.Timmermann
e-mail: timmerma@math.tu-dresden.de

Ergänzungen I

Hier einige ergänzende Ausführungen zur Vollständigkeit und zur Mächtigkeit von Mengen.

1. Vollständigkeit

In Kürze werden wir in der Vorlesung metrische Räume (= Mengen mit einem Abstand) definieren und untersuchen. Ein fundamentaler Begriff wird der der Vollständigkeit sein. Die Definition wird lauten: Ein metrischer Raum **heißt** vollständig, wenn jede Cauchy-Folge (in diesem Raum) konvergiert.
Bei der Einführung der reellen Zahlen hatten wir zur Definition der Vollständigkeit benutzt: *Axiom:* die reellen Zahlen sind in dem Sinne vollständig, dass jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt. Nennen wir diese Art der Vollständigkeit mal kurz "ordnungssvollständig" (weil man, um Supremum usw. zu definieren, eine Ordnung/Anordnung benötigt). Dann kann man beweisen: ordnungssvollständig und vollständig (mit Cauchy-Folgen) sind äquivalente Begriffe in $\mathbb{R}$. Eine Richtung hatten wir bewiesen: aus ordnungssvollständig folgt, dass jede Cauchy-Folge konvergiert. Die andere Richtung kann man auch beweisen. Wir hatten aber noch dazwischen geschaltet: Satz von Bolzano-Weierstrass (jede beschränkte Folge enthält konvergente Teilfolge).
Man kann zeigen: in $\mathbb{R}$ sind die folgenden Sachverhalte/Sätze/Prinzipien äquivalent:
- Supremumprinzip
- Satz von Bolzano-Weierstraß
- Satz von der Intervallschachtelung
- Konvergenz von Cauchy-Folgen.

Wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}^n$ ersetzt, dann kann es natürlich kein Supremumprinzip in diesem einfachen Sinne mehr geben. Die anderen 3 Prinzipien/Sätze sind dann immer noch äquivalent.

Geht man noch allgemeiner vor, dann ist die Konvergenz von Cauchy-Folgen
das entscheidende Instrument zur Vollständigkeitsdefinition. Der Satz von Bolzano-Weierstraß reflektiert dann eine andere Eigenschaft (nämlich Kompaktheit). Das wird im endlichdimensionalen Fall nur verwischt.
Kompaktheit behandelt wir aber auch in Kürze.

2. Zur Mächtigkeit von Mengen

Anregung zu diesen Bemerkungen ergab folgende Anfrage eines Studenten. Dieser wollte den Beweis, daß die Intervalle $(0,1), [0,1]$ gleichmächtig sind, etwa so führen: Zunächst zeigt man leicht, daß alle offenen Intervalle gleichmächtig sind, etwa $(-2,2)$ und eben $(0,1) \subset (-2,2)$. Nun wird wie folgt argumentiert: Da $(0,1) \subset [0,1] \subset (-2,2)$, kann also $(0,1)$ keine größere Mächtigkeit haben als $[0,1]$ und dies keine größere Mächtigkeit als $(-2,2)$. Letzteres ist aber gleichmächtig mit $(0,1)$, also ist gezeigt, daß $(0,1)$ und $[0,1]$ gleichmächtig! Das klingt einleuchtend ist

aber nicht offensichtlich, ganz im Gegenteil! Dahinter steckt ein ziemlich schwieriger Satz. Das soll etwas erläutert werden.
Seien A, B zwei Mengen. Vom logischen Standpunkt hat man 4 Möglichkeiten:
1. A und B sind gleichmächtig.
2. Es existiert eine Teilemenge $B_1 \subset B$, so daß A, B_1 gleichmächtig, aber es existiert keine Teilmenge $A_1 \subset A$, so daß A_1, B gleichmächtig.
3. Es existieren Teilmengen $A_1 \subset A, B_1 \subset B$, so daß A, B_1 und A_1, B gleichmächtig.
4. Es existieren weder A_1 noch B_1 mit den in 3. beschriebenen Eigenschaften.
Im Falle 2 würde man dann sagen: A hat kleinere Mächtigkeit als B bzw. B hat größere Mächtigkeit als A.
Man sieht, wie sich das in unser Ausgangsproblem einordnet:
$A_1 = (0, 1) \subset A = [0, 1]$ ist gleichmächtig zu $B = (-2, 2)$ und $B_1 = [0, 1] \subset B$ ist gleichmächtig (trivialerweise) zu A. Also liegt 3. vor.
Nun gibt es zwei erstaunliche Resultate: 3. ist in Wahrheit identisch mit 1., d.h. wenn 3. gilt, sind A, B gleichmächtig, und 4. kann gar nicht vorkommen!
Satz (Cantor-Bernstein): Ist von zwei Mengen A, B jede einer Teilmenge der anderen gleichmächtig, dann sind A, B gleichmächtig. (zum Beweis siehe z.B. Alexandroff: Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen).
Daß 4. nicht vorkommen kann, kann man eigentlich nicht "beweisen". Man benötigt zum Beweis dazu ein (zusätzliches) Axiom der Mengenlehre, das sog. Auswahlaxiom. (siehe auch o.g. Buch).
Und weil wir gerade dabei sind, noch ein Problem der Mengenlehre, das die Gemüter der Mathematiker über Jahrzehnte erhitzt hat. Sie wissen bereits, daß die Mächtigkeit der rationalen Zahlen (abzählbar) echt kleiner als die Mächtigkeit der reellen Zahlen ist. Die Frage ist: gibt es eine Menge $M : \mathbb{Q} \subset M \subset \mathbb{R}$, so daß M weder die Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$ noch die von $\mathbb{R}$ hat (gibt es also zwischen abzählbar und der Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ noch eine Mächtigkeit)? Dieses Problem wurde von Cantor noch im 19. Jahrhundert formuliert, in Form der sog. **Kontinuumhypothese**: solch eine Menge M existiert nicht. Hilbert formulierte in seinem berühmten Vortrag 1900 (in dem er 23 wichtige mathematische Probleme auflistete) die Aufgabe, diese Hypothese zu beweisen / oder zu widerlegen, als 1. Problem. Erst 1963 gelang es Cohen, die Rolle der Kontinuumhypothese (und des sog. Auswahlaxioms) genau zu klären.Diese Diskussion geht schon tief in die Grundlagen der Mathematik.