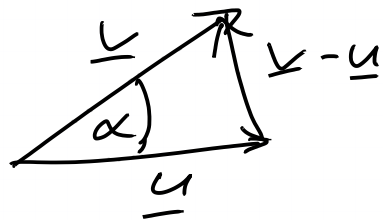


In jedem Dreieck gilt der Kosinussatz ($\Rightarrow$ Pythagoras + Höhe)

$$|\underline{v} - \underline{u}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 - 2|\underline{u}||\underline{v}|\cos(\alpha)$$



$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (v_k - u_k)^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2 + \sum_{k=1}^n v_k^2 - 2|\underline{u}||\underline{v}|\cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n v_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n u_k v_k + \sum_{k=1}^n u_k^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2 + \sum_{k=1}^n v_k^2 - 2|\underline{u}||\underline{v}|\cos(\alpha) \quad | : -2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n u_k v_k = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cos(\alpha)$$

Def 6.23

Das **euklidische Skalarprodukt** zweier Vektoren $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle := \sum_{k=1}^n u_k v_k = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos(\alpha)$$

mit dem eingeschlossenen Winkel α .

Bem. 6.24

Allgemein ist eine Abb. $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ genau dann ein **Skalarprodukt**,

wenn für beliebige $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ die Eigenschaften

- $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \overline{\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle}$ (**Symmetrie** falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$)
 - $\langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$ (**Additivität** bzgl. des ersten Argumentes)
 - $\langle \lambda \underline{x}, \underline{y} \rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ (**Homogenität** — " —)
 - $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0$ und $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0} \in V$ (**positive Definitheit**)
- gelfen.

Bsp. 6.25

$$\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \langle \underline{v}^1, \underline{v}^2 \rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2$$

$$|\underline{v}^1| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5} = |\underline{v}^2|$$

$$\langle \underline{v}^1, \underline{v}^2 \rangle = |\underline{v}^1| \cdot |\underline{v}^2| \cdot \cos(\alpha) = 5 \cdot \cos(\alpha) = 2$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \cos(\alpha) = 2 \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\approx 1.107 \text{ rad} \approx 63.4^\circ$$

$$\boxed{A} \cdot \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Winkel?}$$

$$\langle \underline{v}^1, \underline{v}^2 \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = 0 = |\underline{v}^1| \cdot |\underline{v}^2| \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Vektoren stehen senkrecht aufeinander, $\Leftrightarrow \underline{v}^1 \perp \underline{v}^2$

Def. 6.26

- Jedes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ über V definiert eine **Vektornorm** (Länge)

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle},$$

d.h. es gilt

- $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \underline{0} \in V$,
 - $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ für alle $u, v \in V$,
 - $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ für alle $\lambda \in K, u \in V$.
- Der **Winkel** zwischen zwei von Nullvektor verschiedenen Vektoren $u, v \in V$ ist das eindeutig bestimmte $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Symbol: $\alpha = \angle(u, v)$

- Gilt $\langle u, v \rangle = 0$, d.h. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so heißen u und v **senkrecht** bzw. **orthogonal** zueinander. Ist $\langle u, v \rangle = \pm \|u\| \|v\|$, so liegen u und v **parallel** bzw. **antiparallel** zueinander. Symbole: $u \perp v$, $u \parallel v$.

Bem. 6.27

- Der Betrag von $v \in \mathbb{R}^n$ ist die euklidische Norm, die von euklidischen Skalarprodukt erzeugt wird:

$$\|v\| := \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k \cdot v_k} = \sqrt{\langle v, v \rangle} =: \|v\|.$$

- Die Existenz von α (bzw. dass $\left| \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right| \leq 1$ gilt) folgt aus der

Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU)

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

Bew.: $K = \mathbb{R}$ Für $v \neq \underline{0}$ (sonst klar) und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig folgt

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u - \lambda v\|^2 &= \langle u - \lambda v, u - \lambda v \rangle \\ &= \|u\|^2 - 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \|v\|^2 \end{aligned}$$

Setze $\lambda = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$ und es folgt

$$0 \leq \|u\|^2 - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|v\|^2} \Leftrightarrow \langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2 \quad \square$$

Bsp. 6.28 (Projektion auf Vektor)

Gegeben seien die Vektoren $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wie lautet der auf $\underline{b}$ projizierte Vektor $\underline{v}_{\underline{b}}$?

Für einen Vektor $\underline{a}$ der Länge 1 ($\|\underline{a}\|=1 \Leftrightarrow$ Einheitsvektor) gilt

$$\langle \underline{v}, \underline{a} \rangle = \|\underline{v}\| \|\underline{a}\| \cos(\alpha) = \|\underline{v}\| \cos(\alpha)$$

Für einen auf $\underline{a}$ projizierten Vektor ist dann

$$\underline{v}_{\underline{a}} = \|\underline{v}\| \cos(\alpha) \cdot \underline{a} = \langle \underline{v}, \underline{a} \rangle \cdot \underline{a}$$

(Länge ist $\|\langle \underline{v}, \underline{a} \rangle \cdot \underline{a}\| = |\langle \underline{v}, \underline{a} \rangle| \cdot \|\underline{a}\| = |\langle \underline{v}, \underline{a} \rangle|$ und Richtung $\underline{a}$)

I.A. $\|\underline{b}\| \neq 1$, aber $\underline{a} := \frac{\underline{b}}{\|\underline{b}\|}$ ist normierter Vektor zu $\underline{b}$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{v}_{\underline{b}} = \frac{\langle \underline{v}, \underline{b} \rangle}{\|\underline{b}\|^2} \cdot \underline{b}}$$

$$\text{Für } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\underline{b}\|^2 = 1^2 + 2^2 = 5, \langle \underline{v}, \underline{b} \rangle = 3 + 2 = 5$$

$$\Rightarrow \underline{v}_{\underline{b}} = \frac{5}{5} \cdot \underline{b} = \underline{b}.$$

Mit Hilfe einer Basis lässt sich jeder Vektor $\underline{v}$ eindeutig als Linearkomb.

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}^1 + \lambda_2 \underline{b}^2 + \dots + \lambda_n \underline{b}^n$$

darstellen, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ berechnet werden müssen. $\rightarrow$ Bsp. 6.18. Sind die $\underline{b}^k$ paarweise orthogonal, d.h. $\langle \underline{b}^i, \underline{b}^j \rangle = 0$, $i \neq j$, so heißt $\{\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^n\}$ eine

Orthogonalbasis und sind sie zusätzlich normiert, d.h. $\|\underline{b}^k\| = 1$, so heißt sie **Orthonormalbasis (ONB)**. Für eine solche Basis ist die Berechnung der Koeffizienten λ_k sehr einfach:

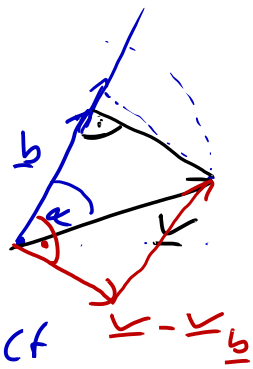
$$\begin{aligned} \langle \underline{v}, \underline{b}^1 \rangle &= \lambda_1 \underbrace{\langle \underline{b}^1, \underline{b}^1 \rangle}_{=\|\underline{b}^1\|^2=1} + \lambda_2 \underbrace{\langle \underline{b}^2, \underline{b}^1 \rangle}_{=0} + \dots + \lambda_n \underbrace{\langle \underline{b}^n, \underline{b}^1 \rangle}_{=0} \\ &= \lambda_1. \end{aligned}$$

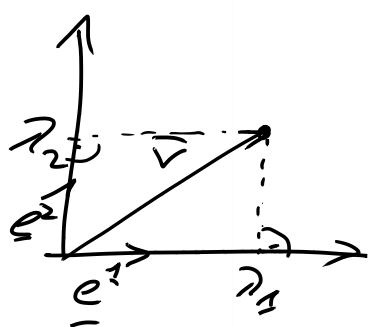
Satz 6.29 Darstellung bzgl. einer ONB

Es seien $\{\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^n\}$ eine ONB von V und $\underline{v} \in V$ beliebig. Dann gilt

$$\underline{v} = \sum_{k=1}^n \langle \underline{v}, \underline{b}^k \rangle \cdot \underline{b}^k.$$

Dies ist die Summe der Projektionen von $\underline{v}$ auf die orthogonalen Basisvektoren





$\mathbb{R}^2$, euklidisches Skalarprodukt
 $v = \lambda_1 \cdot e^1 + \lambda_2 \cdot e^2$

wie erhält man aus einer gegebenen Basis eine ONB?

→ Nutze die Basisvektoren und ziehe Projektionen bzgl. bereits gefundenen ONB-Vektoren ab + normieren.

Alg. 6.30 Orthonormalisierung nach Gram-Schmidt

geg: Basis $\{\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n\}$ von V

Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$

Norm $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle} : V \rightarrow \mathbb{K}$

$$\underline{b}^1 := \frac{\underline{a}^1}{\|\underline{a}^1\|}$$

für $k=2, 3, \dots, n$ bestimme

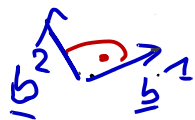
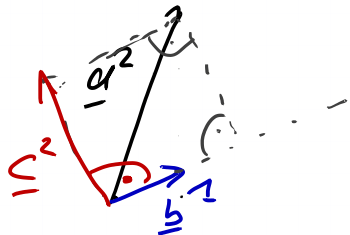
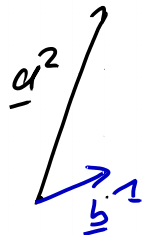
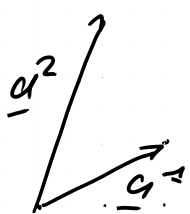
$$\underline{b}^k = \frac{\underline{c}^k}{\|\underline{c}^k\|} \quad \text{mit} \quad \underline{c}^k := \underline{a}^k - \sum_{l=1}^{k-1} \langle \underline{a}^k, \underline{b}^l \rangle \cdot \underline{b}^l$$

Ausgabe: $\{\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^n\}$

$$\underline{a}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{c}^2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\in \mathbb{R}} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Bsp. 6.31

$$\underline{a}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\underline{b}^1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c}^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{24}{25} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b}^2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$[A] \cdot \underline{a}^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b}^1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{24}{25} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b}^2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$