

Satz 7.57

Lässt sich das charakteristische Polynom χ_A als Produkt von Linearfaktoren über $\mathbb{K}$ schreiben, so ist A genau dann diagonalisierbar, wenn für jedes EW die geom. und alg. Vielfachheit übereinstimmt. S kann dann spaltenweise aus den n (nicht notwendigerweise orthogonalen) EV gebildet werden.

- In $K = \mathbb{C}$ zerfällt χ_A immer in Linear Faktoren $\rightarrow$ Fundamentalsatz Algebra
- Zerfällt in $K = \mathbb{R}$ χ_A nicht in Linear Faktoren, so gibt es einen quadrat. Faktor mit nichtreellen Nullstellen $\Rightarrow A$ ist nicht diagonalisierbar.

Ben 7.58

$$\begin{aligned} A \underline{x} &= \underline{b} & \Leftrightarrow & S^{-1} A \underline{x} = S^{-1} \underline{b} & \Leftrightarrow & \underline{1} \underline{x} = S^{-1} \underline{b} \\ & & \text{bezeichne } \underline{y} = S^{-1} \underline{x} & : & \underline{1} \cdot \underline{y} = S^{-1} \underline{b} & \text{l\u00f6sen nach} \\ & & & & S^{-1} \underline{x} = \underline{y} & \text{einfach} \\ & & & & \Leftrightarrow \underline{x} = S \underline{y} & \Rightarrow \text{System gel\u00f6st} \end{aligned}$$

besonders effizient, wenn $S=Q$
 $(A=A^T) \Rightarrow S^{-1}=Q^T \rightarrow \underline{x} = Q \underline{A}^{-1} Q^T \underline{b}$

→ Hausholder-Verfahren

→ Given - Rotation

$$\uparrow$$

$$\text{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n})$$

- Ist eine große Potenz einer Matrix A zu bestimmen, z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ ges: } A^{2026}$$

Der direkte Weg ist aufwendig. Cleverer: $A = S \Lambda S^{-1}$

$$\Rightarrow A^k = (S \Lambda S^{-1})^k = S \underbrace{\Lambda (S^{-1} S) \Lambda (S^{-1} \dots S) \Lambda S^{-1}}_{\substack{= E \\ k\text{-mal}}} = S \Lambda^k S^{-1}$$

aber $\Lambda^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$

$$A = A^T \Rightarrow S = Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = Q^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{2026} = Q \begin{pmatrix} 1^{2026} & 0 \\ 0 & 3^{2026} \end{pmatrix} Q^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3^{2026} & -1+3^{2026} \\ -1+3^{2026} & 1+3^{2026} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Bsp 7.5c.}$$

7.5 Positive Definitheit, Hauptachsentransformation

Anwendung 1. Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch ($A = A^T$), so gilt mit den EW/EV $\lambda_i, \underline{v}^i \quad i \in \{1, \dots, n\}$ für einen beliebigen Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$

$$\begin{aligned} \underline{x}^T A \underline{x} &= \underline{x}^T Q \Lambda Q^T \underline{x} && \left(\text{mit } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \right. \\ & && \left. Q = (\underline{v}^1 \dots \underline{v}^n) \right) \\ &= \underbrace{(\underline{x}^T Q)}_{=: \underline{y}^T} \Lambda \underbrace{(Q^T \underline{x})}_{=: \underline{y}} && \text{mit } \underline{y} \neq \underline{0} \\ &= \underline{y}^T \Lambda \underline{y} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{y_k^2}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Def 7.59

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine (symmetrische) Matrix, so dass für jeden Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$

$\underline{x}^T A \underline{x} > 0$ gilt, so heißt A (symmetrisch) **positiv definit** (s.p.d.). Gilt nur

$$\underline{x}^T A \underline{x} \geq 0$$

so heißt A **positiv semidefinit**. Analog werden **negativ definit**, **negativ semidefinit** und **indefinit** definiert.

Beim 7.60

- Ist A s.p.d., so sind alle EW > 0 .
- Ist A symmetrisch und sind alle EW > 0 , so ist A s.p.d.
- Außerdem ist eine s.p.d. Matrix regulär, denn mit Satz 7.53 folgt

$$\begin{aligned} A = Q \Lambda Q^T &\Leftrightarrow A^{-1} = (Q \Lambda Q^T)^{-1} \\ &= Q^{-T} \Lambda^{-1} Q^{-1} \\ &= Q \Lambda^{-1} Q^T. \end{aligned}$$

Q orthogonal
 $Q^{-1} \stackrel{!}{=} Q^T$
 $\Lambda^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n})$
 $\nearrow$
 ex. ob $\lambda_i > 0$

Anwendung 2: Kegelschnitte

Kreis: $x^2 + y^2 = r^2$

Ellipse: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ Halbachsen a, b

Hyperbel: $\pm \left(\frac{x}{a}\right)^2 \mp \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 x^2 - a^2 y^2 = \pm a^2 b^2$

Parabel: $x^2 = 2py$ oder $y^2 = 2px$

welche Kurve beschreibt

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$0 = \underbrace{9x^2 - 4xy + 6y^2}_{\text{quadratische Form}} - \underbrace{32x - 4y + 24}_{\text{lineare Form}} = \underline{x}^T \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \underline{x} - \underbrace{\begin{pmatrix} 32 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} + 24}_{\text{lineare Form}}?$$

Def 7.61

Zu einer gegebenen symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt für $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$q(\underline{x}) := \underline{x}^T A \underline{x} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

quadratische Form.

Da A symmetrisch ist, existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aus EV von A und eine Diagonalmatrix $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ aus EW von A mit

$$A = Q \Lambda Q^T$$

Dann folgt

$$q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = \underbrace{(\underline{x}^T Q)}_{\underline{y}^T} \Lambda \underbrace{(Q^T \underline{x})}_{\underline{y}} = \underline{y}^T \Lambda \underline{y} =: \hat{q}(\underline{y}).$$

Dies ist die **Normalform** der quadratischen Form und die Transformation von $q(\underline{x})$ zu $\hat{q}(\underline{y})$ wird als **Hauptachsentransformation** bezeichnet.

Geometrisch wird in Prinzip nur das Koordinatensystem gewechselt, indem die EV von A als neue Achsen genutzt werden. Der Typ des Kegelschnittes kann an den EW abgelesen werden.

Bsp. 7.62

$$0 = 1x_1^2 + 2x_1x_2 + 1x_2^2 = \underline{x}^T A \underline{x} \quad \text{mit } A = A^T$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A^T : \text{EW: } \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$$

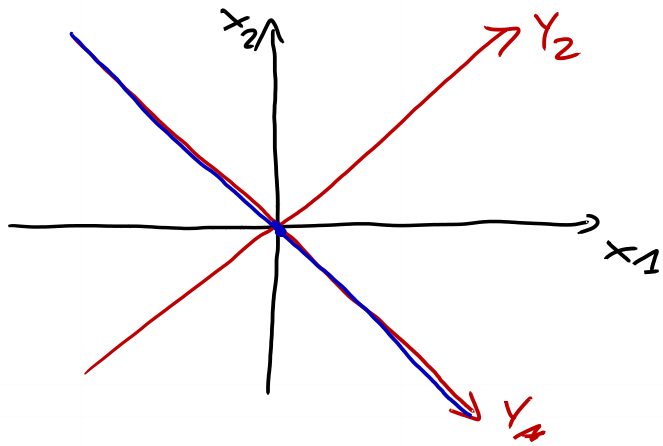
$$\text{EV: } \lambda_1 = 0: (A - \lambda_1 E) \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{v}^1 = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2: \neq \lambda_1 \Rightarrow \underline{v}^2 \perp \underline{v}^1 \Rightarrow \underline{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \text{ ist semipositiv definit}$$

$$\Rightarrow \hat{q}(\underline{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 2y_2^2 = 0$$

Gerade $y_2 = 0, y_1 \in \mathbb{R}$



• $x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = A^T$$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(7-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 8\lambda - 9 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 9 \neq \lambda_1$$

1A

$$(A - \lambda_1 E) \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \underline{v}^1 = \underline{0}$$

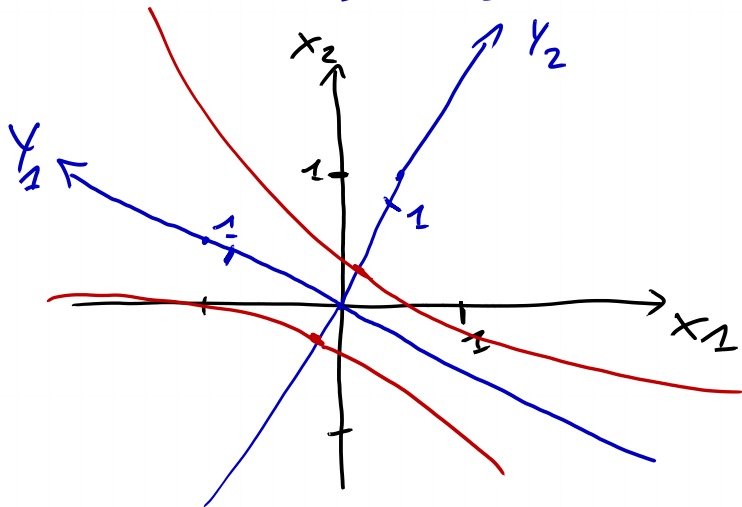
$$\Rightarrow \underline{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{oder } \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\underline{v}^2 \perp \underline{v}^1 \Rightarrow \underline{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow A \text{ indefinit}$$

$$q(\underline{y}) = -y_1^2 + 9y_2^2 = 1 \Rightarrow \text{Hyperbel}$$



Def 7.63

Eine **Quadrik** ist eine allgemeine Gleichung 2. Ordnung der Form

$$\underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{u}^T \underline{x} + c = 0$$

mit $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$, die eine Kurve/Fläche/Hyperfläche beschreibt.

Die zu einer Quadrik gehörige Normalform erhalten wir in 2 Schritten

1) Verschiebung: Löse $A \underline{s} = -\underline{u}$ nach $\underline{s}$ und setze $\underline{x} = \underline{r} + \underline{s}$

(setze geg. $\underline{x}$ in Quadrik ein $\Rightarrow$

$$\underline{r}^T A \underline{r} + \underbrace{c + \underline{u}^T \underline{s}}_{=: q \in \mathbb{R}} = 0$$

quadr. Form

$\rightarrow$ lineare Terme beseitigen

Bem.: nicht immer ist $A\underline{s} = -\underline{m}$ lösbar. ☹

2) Hauptachsentransformation: $\underline{y} = Q^T \underline{r}$

→ gemischte Terme beseitigen

$$\Rightarrow \underline{y}^T \underline{\Lambda} \underline{y} + g = 0$$

Bsp 7.64

$$9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 32x_1 - 4x_2 + 24 = 0 = \underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{m}^T \underline{x} + c$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \underline{m} = \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c = 24 \quad \Rightarrow \text{Quadrik}$$

1) $A \cdot \underline{s} = -\underline{m}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -2 & 16 \\ -2 & 6 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}' = \text{II} + 3\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -2 & 16 \\ 25 & 0 & 50 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x} = \underline{r} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $\underline{r}^T A \underline{r} + g = 0$, $g = c + \underline{m}^T \underline{s} = 24 - \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -10$

EW: $\det \begin{pmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 \stackrel{!}{=} 0$
 $\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 10$

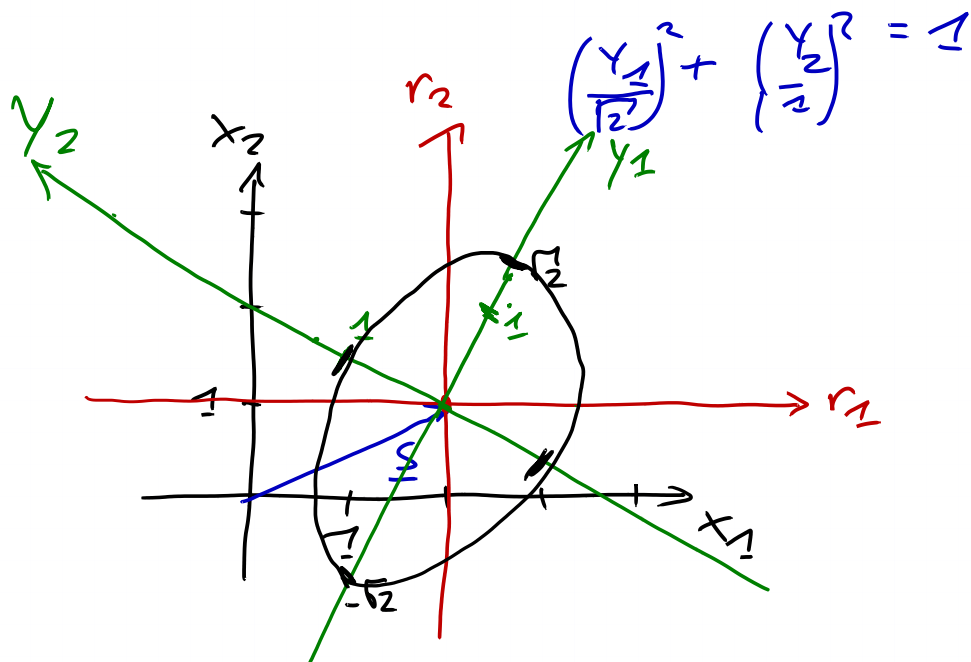
EV: $(A - \lambda_1 E) \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{v}^1 = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \underline{v}^2 \perp \underline{v}^1 \Rightarrow \underline{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}(\underline{y}) = 5y_1^2 + 10y_2^2 = 10 \quad | : 10$$

Ellipse $a = \sqrt{2}, b = 1$



1) Koordinaten System (x_1, x_2)
 2) verschobenes Koordinaten System (r_1, r_2)
 $\underline{x} = \underline{r} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) gedrehtes verschobenes Koord. System
 $(y_1, y_2): \underline{y} = Q^T \underline{r}$

4) Ellipse zeichnen