

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

1. Woche – Wiederholung Abiturstoff + etwas Ausblick

Funktionen

A1 Zeichnen Sie (ohne Taschenrechner!) folgende Funktionen

- (a) $f(x) = 2^x, g(x) = 3^x$ (ggf. erst eine kleine Wertetabelle erstellen).
- (b) ($e \approx \dots$?) $f(x) = e^x = \exp(x)$, $g(x) = f(-x) = e^{-x}$, $h(x) = -f(x) = -e^x$ sowie $y = 1 - e^{-x}$.
- (c) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} =: \cosh(x)$ (ohne Tafelwerk!: Funktionen aus (b) grafisch addieren!)
- (d) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} =: \sinh(x)$ (ohne Tafelwerk!: Funktionen aus (b) grafisch subtrahieren!)
- (e) $|x|$, $|x - 3|$, $2 \cdot |x - 3|$. Kennzeichnen Sie auf der x-Achse den Bereich, für den gilt $|x - 3| < 4$ sowie den Bereich mit $|x - 3| \geq 4$ (grafisch denken!).
- (f) $|x + 1|$, $|x - 1|$ und $y = |x + 1| - |x - 1|$.
- (g) Sie werden öfter u.a. im Fach Systemtheorie mit der Heaviside- bzw. Sprungfunktion arbeiten:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0 \\ 1, & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

Zu zeichnen: $s(t)$, $s(t - 2)$, $2 \cdot s(t - 3)$ sowie $s(t - 2) - 2 \cdot s(t - 3)$

- (h) $\sin(x)$, $\sin(-x)$, $\sin(x + \frac{\pi}{2})$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\arctan(x)$

A2 Geben Sie folgende Funktionswerte der Sinusfunktion an (ohne Tefelwerk/Rechner!): am rechtwinkligen Dreieck mit Definition Sinus und mit Pythagoras arbeiten und in dem in der Tabelle vorgeschlagenen Format angeben!

α	0	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{2}$
$\tan \alpha$					

In der höheren Mathematik geben wir Winkel in radian (im Bogenmaß) anstatt in Grad an, $0^\circ \sim 0$, $180^\circ \sim \pi$. Rechnen Sie die obigen Winkel in radian um.

Lösung:

α	0	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Nullstellen

A3 Lösen Sie folgende Gleichungen:

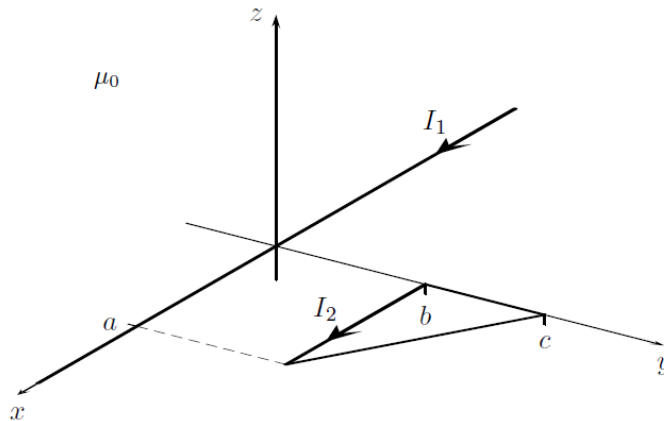
- (a) $x^2 + 2x = 0$
- (b) $(x - 3)(x + 2) = 0$ (Hingucken! Nicht dem 'Ausmultiplizier-Reflex' nachgeben.)
- (c) Was besagt der Wurzelsatz von Vieta? Nutzen Sie ihn, um die Lösungen der Gleichungen zu 'sehen': $x^2 + 5x + 6 = 0$, $x^2 - 2x - 8 = 0$, $x^2 + 5x = 14$.

Lösung:

- (a) $x^2 + 2x = x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -2$
- (b) $x = 3 \vee x = -2$
- (c) Regel von Vieta: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_p x + \underbrace{x_1 x_2}_q$
 $x^2 + 5x + 6 \Rightarrow x = -2 \vee x = -3$
 $x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -2$
 $x^2 + 5x = 14 \Rightarrow x = -7 \vee x = 2$

Geradengleichung

A4 Zusatz: Gegeben ist folgende Anordnung aus einer Aufgabe der Theoretischen Elektrotechnik,



zu deren Lösung es nötig ist, u.a. die Gerade durch die Punkte $P_1(0, c, 0)$ und $P_2(a, b, 0)$ zu beschreiben.

- (a) Markieren Sie die Punkte P_1 und P_2 in der Grafik.
- (b) Die Gerade durch P_1 und P_2 liegt in der x, y -Ebene und kann beschrieben werden durch: $z = 0$ und $y = f(x) = ?$ (oder $x = g(y) = ?$). Geben Sie die Geradengleichung $y = \dots$ (oder $x = \dots$) an.
- (c) Kontrollieren Sie, dass die Punkte $(x, y) = (0, c)$ und $(x, y) = (a, b)$ wirklich auf Ihrer Geraden aus (b) liegen.

Lösung:

- (b) $y = c + \frac{(b-c)}{a}x$ oder $x = \frac{a}{b-c}(y - c)$
 (c) $y(0) = c, y(a) = b$ ✓ bzw. $x(b) = a, x(c) = 0$ ✓.

Analytische Geometrie

- A5** (a) Zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ haben die Länge 2 bzw. 3 und schließen einen Winkel von 45° ein. Zeichnen Sie die Situation und geben Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren an.
 (b) Skizzieren Sie eine Ebene im 3-dimensionalen Raum (im $\mathbb{R}^3$) und einen Normalvektor dazu (einen Vektor senkrecht zu der Ebene).
 (c) Zeichnen Sie den Vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in ein 3-dim. Koordinatensystem. Überlegen Sie, für

welche Punkte (x, y, z) (geometrische Gestalt dieser Punktmenge) gilt: $\underline{a} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

Lösung:

- (a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 45^\circ$
 $2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$
 (c) Ebene $\perp \underline{a}$ durch Koordinatenursprung

Integralrechnung

A6 Zusammenhang Strom - Ladung Machen Sie sich (möglichst grafisch) klar

- (a) Das Integral $\int_{t_0}^{t_1} i(t)dt = q(t_1) - q(t_0)$ (mit q =Stammfunktion von i , also $\frac{dq}{dt} = i$) gibt die Fläche unter der Kurve $i(t)$ zwischen t_0 und t_1 an.
- (b) Das Integral $\int_{t_0}^t i(\tau)d\tau = q(t) - q(t_0)$ (mit $\frac{dq}{dt} = i$) ist die Fläche unter der Kurve $i(t)$ zwischen t_0 und **variablem rechten Rand** t . Sinnvollerweise nennt man die Integrationsvariable anders als die Integrationsgrenze (τ und nicht t).
- (c) Aus (b) folgt $q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t i(\tau)d\tau$ (mit $\frac{dq}{dt} = i$), was der Summe aus dem **'Startwert'** zum **'Startzeitpunkt'** (linker Rand t_0) und dem Integral über ein variables (Zeit-) Intervall entspricht. Da die Integrationsgrenze von t abhängt, ist auch diese Summe eine Funktion von t und keine konstanter Wert wie im Fall (a).

Gleichungen und Ungleichungen

A7 Bringen Sie die beiden Terme 'auf einen Bruchstrich': $\frac{1}{(x-1)} - \frac{x}{(x-1)^2} =$
Lösung: $= \frac{-1}{(x-1)^2}$

A8 Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{e} = \frac{1}{a^{-1}b} - \frac{1}{g}$ nach b auf! **Lösung:** $b = \frac{aeg}{e+g}$

A9 Geben Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $|x - 1| < 3$ an! **Lösung:** $-2 < x < 4$

A10 Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

- () Für alle $x, y \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2(1+y)} = x\sqrt{1+y}$,
- () Für alle $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2+4} = x+2$,

Lösung: beide falsch; am besten mit Gegenbeispiel demonstrieren: $x = -1 \dots$