

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

3. Woche – vollständige Induktion und Mengen, Relationen, Abbildungen

Beweise mit vollständiger Induktion

Z A1 Bernoullische Ungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq -1 : (1+x)^n \geq 1+nx$$

- (a) Veranschaulichen Sie die Ungleichung für $n = 0, 1, 2$ (Graphen der Funktionen 'links' und 'rechts' des Relationszeichens skizzieren).
- (b) Beweisen Sie die Ungleichung mittels vollständiger Induktion.

A2 Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Für $n \in \mathbb{N}$ ist

- (a) $n^3 + 2n$ ist durch 3 teilbar.
- (b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- (c) $4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \dots \cdot 4^n = 2^{n(n+1)}$

Zusatz: $2^n > n^2$ für $n \geq 5$.

Mengen, Relationen, Abbildungen

Z A3 Machen Sie sich anhand zweier Venn-Diagramme den Unterschied zwischen

$$\forall x : (x \in A) \Rightarrow (x \in B) \quad \text{und} \quad \{x : (x \in A) \Rightarrow (x \in B)\}$$

klar!

A4 Skizzieren Sie die kartesischen Produkte a) $[1, 2] \times [3, 4]$ und b) $\{1, 2\} \times [3, 4]$. Zeichnen Sie in das Ergebnis von (a) eine Relation und eine Funktion ein.

A5 Gegeben ist folgende Relation:

Zwei natürliche Zahlen x, y stehen zueinander in Relation $x \sim_R y$, wenn $x|y$ (x teilt y).

- (a) Veranschaulichen Sie die Relation mit Hilfe einer Tabelle beispielsweise mit den Zahlen 1 bis 8 (wie in VL 1.5, Bsp. 1.33).
- (b) Welche Eigenschaften besitzt die Relation (reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv)?

Zusatz Falls es sich um eine Ordnungsrelation handelt ;-), veranschaulichen Sie die Ordnung durch einen (gerichteten) Graphen, der die Zahlen der Reihe nach verbindet, die in Relation stehen.

A6 Gegeben ist folgende Relation:

Zwei ET-Studenten x, y des Jahrgangs 2025 stehen zueinander in Relation $x \sim_R y$, wenn Sie in der gleichen Seminargruppe sind.

- (a) Ist das eine Äquivalenzrelation?
- (b) Handelt es sich um eine Ordnungsrelation?

Zusatz Was bedeutet die Aussage: 'Die Mengen A,B sind **disjunkt**.'??

Sind zwei verschiedene Seminargruppen zueinander disjunkt?

A7 Geben Sie a) die Anzahl aller möglichen, b) die Anzahl aller **surjektiven** und c) die Anzahl aller **bijektiven** Abbildungen zwischen zwei drei-elementigen Mengen an.

Wiederholung

A8 Übersetzen Sie die Aussage: 'Wenn A, dann B.' in

(a) ... ist hinreichend für ...

(b) ... ist notwendig für ...

(c) $\dots \Rightarrow \dots$