

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

5. Woche – Parabel, Kreis, Ellipse, quadratische Ergänzung, Polynome, Nullstellen

Äquivalente, zulässige und unzulässige Umformungen

- A1** Welche der folgenden Umformungen sind äquivalent, zulässig bzw. unzulässig?
 Kennzeichnen Sie dies mit $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ bzw. $\nRightarrow$.
 In welchem der Fälle muss am Ende eine Probe gemacht werden?

$$\begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{l} x = 3 \\ x^2 = 9 \end{array} & \begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x = 3 \end{array} & \begin{array}{l} x^2 = 9 \\ |x| = 3 \end{array} & \begin{array}{l} |x| = 3 \\ (x = 3) \vee (x = -3) \end{array} \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{l} x = 3 \\ \Rightarrow x^2 = 9 \\ \dots \\ \text{Probe!} \end{array} & \nRightarrow \begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x = 3 \end{array} & \Leftrightarrow \begin{array}{l} x^2 = 9 \\ |x| = 3 \end{array} & \Leftrightarrow \begin{array}{l} |x| = 3 \\ (x = 3) \vee (x = -3) \end{array} \end{array}$$

Parabel, Kreis, quadratische Ergänzung

- Z A2** Stellen Sie eine Gleichungen für

- (a) eine 'nach oben bzw. nach unten geöffnete' Parabel mit dem Scheitel $S(0, 0)$,
- (b) eine 'nach links bzw. nach rechts geöffnete' Parabel mit dem Scheitel $S(0, 0)$,
- (c) für alle Fälle in (a,b) mit dem Scheitel in $S(1, 2)$ auf.

Lösung:

- (a) $y = \pm x^2$,
- (b) $x = \pm y^2$,
- (c) $y - 2 = \pm(x - 1)^2$ bzw. $x - 1 = \pm(y - 2)^2$.

- A3** In der k_p, k_i -Ebene (analog x, y -Ebene von Aufgabe 3.5) skizziere man den Lösungsbereich von: $k_p < 10, k_i > 0$ und $k_i < -\frac{1}{6}(k_p^2 - 9k_p - 10)$.
 (Ausblick: Das ist der Stabilitätsbereich eines sogenannten [PI-Reglers](#).)

Lösung: [Stabilitätsbereich](#)

- A4** Stellen Sie die Gleichungen für folgende Kegelschnitte auf:

- (a) Kreis: Mittelpunkt $M(3, 5)$, Radius $r = 8$,
 (b) Ellipse: Mittelpunkt $M(0, 0)$, Halbachsen $a = 11$, $b = 8$.

Lösung:

- (a) Kreisgleichung allg.: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ mit $M(x_0, y_0)$ und Radius r .

hier speziell: $\boxed{(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 64}$

In der komplexen Ebene würde man diesen Kreis durch $|z - (3 + i5)| = 8$ beschreiben.

- (b) Ellipsengleichung: $\boxed{\frac{x^2}{11^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1}$

Z A5 Bestimmen Sie Art und Lage der folgenden Kegelschnitte (Kreise, Parabeln, ...).
 Hinweis: überführen Sie dazu mittels "quadratischer Ergänzung" die Gleichungen in ihre jeweilige Grundform.

- a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 4$ b) $y^2 - 6y = -x + 3$

Lösung: Allgemein bedeutet quadratische Ergänzung: $x^2 + ax = \underbrace{x^2 + ax + \frac{a^2}{4}}_{(x+\frac{a}{2})^2} - \frac{a^2}{4}$

- (a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 4$
 $\rightarrow x^2 + 2x + y^2 + 2y = x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 - 1 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 - 2 = 4$

$\rightarrow \boxed{(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 6}$ Kreis mit $M(-1, -1)$ und $r = \sqrt{6}$

- (b) $y^2 - 6y = -x + 3$
 $\rightarrow y^2 - 6y + 9 - 9 = (y - 3)^2 - 9 = -x + 3$

$\rightarrow \boxed{(y - 3)^2 = -x + 12}$ Parabel mit $S(12, 3)$, links ge"öffnet.

Z A6 Analog zur **parametrischen Beschreibung**

- einer Geraden $z = z_0 + r e^{i\varphi_0}$ (φ_0 fix und $r \in \mathbb{R}$ variabel)

lässt sich auch eine parametrische Beschreibung

- eines Kreises $z = z_0 + r e^{i\varphi}$ bzw. $\begin{aligned} \operatorname{Re}(z - z_0) &= r \cos(\varphi) \\ \operatorname{Im}(z - z_0) &= r \sin(\varphi) \end{aligned}$ (r fix und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ variabel)
sowie

- einer Ellipse $\begin{aligned} \operatorname{Re}(z - z_0) &= a \cos(\varphi) \\ \operatorname{Im}(z - z_0) &= b \sin(\varphi) \end{aligned}$, s. auch [TET2 S.47](#)

angeben.

Leiten Sie jeweils aus der parametrischen Beschreibung die parameterfreie Beschreibung für Kreis: $(\operatorname{Re}(z - z_0))^2 + (\operatorname{Im}(z - z_0))^2 = r^2$ und Ellipse: $\frac{(\operatorname{Re}(z - z_0))^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{Im}(z - z_0))^2}{b^2} = 1$ her, s. 2.20.

Lösung: Trigonometrischen Pythagoras verwenden $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$.

A7 Zusatz: Stellen Sie die Gleichungen aller Kreise auf, die die Koordinatenachsen berühren und durch den Punkt $P(1, 2)$ gehen. Geben Sie die zugehörigen Mittelpunkte und Radien an.

Lösung: Kreisgleichung: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ mit $M(x_0, y_0)$ und Radius r . Die Berührungspunkte sind offenbar: $B_1(0, y_0)$ und $B_2(x_0, 0)$; $M(x_0, y_0)$ liegt im 1. Quadranten.

Einsetzen von $P(1, 2)$: $(1 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 = r^2$.

Einsetzen von B_1 : $x_0^2 = r^2$.

Einsetzen von B_2 : $y_0^2 = r^2$.

da $x_0 \geq 0$ und $y_0 \geq 0 \rightarrow x_0 = y_0 = r$.

Einsetzen in die erste Gleichung liefert: $(1 - r)^2 + (2 - r)^2 = r^2$ (*)

Also $r^2 - 6r + 5 = 0 \rightarrow r_1 = 1, r_2 = 5$.

Es erfüllen genau zwei Kreise die obigen Bedingungen, und zwar

K_1 mit Mittelpunkt $M(1, 1)$ und Radius $r = 1$: $K_1 = \{(x, y) \mid (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1\}$

K_2 mit Mittelpunkt $M(5, 5)$ und Radius $r = 5$: $K_2 = \{(x, y) \mid (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25\}$.

Bemerkung: Gleichung (*) kann man auch direkt aus einer geometrischen Lagebetrachtung und dem Satz des Pythagoras schlussfolgern.

A8 Zusatz: Das letzte Beispiel in 2.21 zeigt, dass alle Punkte z , deren Abstände zu zwei gegebenen (komplexen) Zahlen, z_1, z_2 , in einem bestimmten Verhältnis, α , zueinander stehen (für $\alpha \neq 1$) auf einem Kreis liegen:

$$\|z - z_2\| = \alpha \|z - z_1\|$$

Konkret wurde für 'Gegeben': $z_1 = 1, z_2 = i$ und $\alpha = 2$ der Radius R und der Mittelpunkt M des Kreises ermittelt.

Im Fach Theoretische Elektrotechnik wird die gleiche Tatsache jedoch mit geändertem 'Gegeben' und 'Gesucht' genutzt: die zweite Zeile in TET1 S.107 können wir übertragen auf unseren Kontext als:

$$\|z - s_2\| = \alpha \|z - s_1\| \quad (0.1)$$

notieren mit 'Gegeben': $z_1 = s_1, M = 0, R$ (also $z = R e^{i\varphi}, \varphi \in (-\pi, \pi]$) und 'Gesucht': s_2 und α .

Verifizieren Sie die Lösung $s_2 = R^2/s_1, \alpha = R/s_1$, d.h. überprüfen Sie, dass die Gleichung (??) mit $z = R e^{i\varphi}$ für dieses s_2, α gilt.

Lösung:

$$\begin{aligned}\|z - s_2\| &= \alpha \|z - s_1\| \text{ mit } z = R e^{i\varphi}, s_2 = R^2/s_1, \alpha = R/s_1 \\ \Leftrightarrow \|R e^{i\varphi} - R^2/s_1\| &= R/s_1 \|R e^{i\varphi} - s_1\| \\ &= \|R^2/s_1 e^{i\varphi} - R\| \\ &= \|(R^2/s_1 - R e^{-i\varphi}) e^{i\varphi}\| \\ &= \|R^2/s_1 - R e^{-i\varphi}\| \underbrace{\|e^{i\varphi}\|}_{=1} \\ &= \|R e^{-i\varphi} - R^2/s_1\| \checkmark \text{ da Beträge konjugiert komplexer Zahlen gleich}\end{aligned}$$

Polynome, Nullstellen

- A9** (a) Geben Sie ein Polynom mit den Nullstellen $z_1 = 3$ und $z_2 = 2i$ an.
(b) Geben Sie ein Polynom mit **reellen Koeffizienten** und den Nullstellen $z_1 = 3$ und $z_2 = 2i$ an.

Lösung: a) $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)$, b) $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2)$

- A10** Gegeben ist ein Polynom 3. Grades mit reellen Koeffizienten. Geben Sie alle Möglichkeiten für die Anzahl reeller und die Anzahl komplexer Nullstellen an.

- A11 Zusatz:** Beweisen Sie [Bem. 2.26 3](#)) :

Ist z nichtreelle Nullstelle des reellen Polynoms $P(z)$, so ist $\bar{z}$ ebenfalls eine Nullstelle.
bzw.

Nullstellen treten in Polynomen mit reellen Koeffizienten immer in konjugiert komplexen Paaren auf.

Zeigen Sie zu diesem Zweck zunächst: $(\bar{z})^n = \overline{(z^n)}$ und somit, dass $a_n(\bar{z})^n = \overline{(a_n z^n)}$.
Was folgt daraus für $P(\bar{z})$? ($P(z) = ?!$)

Lösung:

Beweis: Wegen $\overline{\bar{a}b} = \overline{ab}$, ggf. nachrechnen: $(x_a - iy_a)(x_b - iy_b) = \overline{(x_a + iy_a)(x_b + iy_b)}$
folgt $(\bar{z})^2 = \overline{(z^2)}$ und

per vollständiger Induktion $(\bar{z})^n = \overline{(z^n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (1)

Laut Voraussetzung ist $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = 0$, da z **Nullstelle**.

Folglich ist

$$\begin{aligned}
 P(\bar{z}) &= \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k \\
 &= \sum_{k=0}^n a_k \overline{z^k} && \text{wegen (1)} \\
 &= \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} && \text{wegen } a_k \in \mathbb{R} \\
 &= \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} && \text{wegen } \overline{\bar{a} + \bar{b}} = \overline{a + b} \\
 &= \overline{P(z)} = \bar{0} = 0 && \text{da } z \text{ Nullstelle}
 \end{aligned}$$

Also ist $P(\bar{z}) = 0$ und somit $\bar{z}$ Nullstelle.

q.e.d.