

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

6. Woche – Polynome: Horner - Schema, Interpolation, Exponential-Funktionen

Funktionen: explizit, implizit

A1 In der LV Grundlagen der Elektrotechnik wird in einem Erklärvideo eine **explizite** Funktion

ges.: $u_a = f(u_q)$ gesucht und als Ergebnis $u_a = \begin{cases} u_q & \text{für } 0 \leq u_a < u_{z0} \\ u_q \frac{r_z}{R_v + r_z} + u_{z0} \frac{R_v}{R_v + r_z} & \text{für } u_a \geq u_{z0} \end{cases}$ angegeben.

Was ist an dieser Darstellung problematisch?

Lösung: Es wird (durch die Fallunterscheidung) praktisch u_a als Funktion von u_a angegeben. Das ist **keine explizite** Darstellung!

Polynome: Horner - Schema

A2 Machen Sie sich klar, dass mit dem Horner-Schema tatsächlich der Funktionswert eines Polynoms an der Stelle x_0 berechnet wird, vgl. VL Bsp. 3.8.

Lösung: $b_0 = ((\dots((a_n x_0 + a_{n-1}) x_0 + a_{n-2}) x_0 + \dots) x_0 + a_1) x_0 + a_0 = P(x_0) \quad \checkmark$

A3 Führen Sie die Polynomdivision aus VL Bsp. 3.21 mittels zweier Polynomdivisionen durch einen Linearfaktor (einmal durch $(x - 1)$ und dann durch $(x + 2)$) mit Horner-Schema aus.

Lösung:

	1	2	3	4	2
$x_0 = 1$		1	3	6	10
	1	3	6	10	12 $= P_4(1)$
$x_0 = -2$		-2	-2	-8	
	1	1	4	2 $= P_3(-2)$	

$\Rightarrow$ polynomialer Anteil $= x^2 + x + 4$ (wie gut, stimmt mit der VL überein ;-)).

Z A4 Machen Sie sich klar, warum das Berechnen eines Funktionswertes eines Polynoms an der Stelle x_0 mit dem Horner-Schema genau die Polynomdivision durch den Linearfaktor $(x - x_0)$ realisiert, indem Sie

- den Zusammenhang zwischen den Polynomkoeffizienten a_i , $i = 0, \dots, n$ und den Koeffizienten des 'Ergebnispolynoms' b_i , $i = 1, \dots, n$ aus dem Horner-Schema ablesen: $b_i = \dots$
- sowie aus der Gleichung in VL Bem. 3.11

$$P_n(x) = (x - x_0)P_{n-1}(x) + b_0 \quad \text{mit} \quad P_{n-1}(x) = b_n x^{n-1} + \dots + b_2 x + b_1$$

durch **Vergleich der Koeffizienten** vor x^i der linken und rechten Seite einen Zusammenhang zwischen a_i (Koeffizienten von $P_n(x)$) und b_i (Koeffizienten von $P_{n-1}(x)$) feststellen: $a_i = \dots$

- sich überzeugen, dass die Ergebnisse von (a) und (b) zueinander äquivalent sind.

Beispiel:

	2	4	-4	-8	2	4	
$x_0 = 1$		2	6	2	-6	-4	
	2	6	2	-6	-4	0	$= P_5(1) \Rightarrow P_5(x) = (x-1)(2x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 6x - 4)$
allgemein	a_n	$\dots$	$\dots$	a_i	$\dots$	a_0	
x_0		$x_0 b_n$	$\dots$	$x_0 b_{i+1}$	$\dots$	$x_0 b_1$	
	b_n	$\dots$	b_{i+1}	b_i	b_1	0	$= P_n(x_0) \Rightarrow P_n(x) = (x-x_0)(b_n x^{n-1} + \dots + b_1)$
bzw.	a_n	$\dots$	$\dots$	a_i	$\dots$	a_0	
x_0		$x_0 b_n$	$\dots$	$x_0 b_{i+1}$	$\dots$	$x_0 b_1$	
	b_n	$\dots$	b_{i+1}	b_i	b_1	b_0	$= P_n(x_0) \Rightarrow P_n(x) = (x-x_0)(b_n x^{n-1} + \dots + b_1) + b_0$

Lösung:

(a) aus einer Spalte in obiger Tabelle ablesen $b_i = a_i + x_0 b_{i+1}$

(b) Koeffizientenvergleich für x^i : $a_i = b_i - x_0 b_{i+1}$

(c) $b_i = a_i + x_0 b_{i+1} \Leftrightarrow a_i = b_i - x_0 b_{i+1}$

mit $i = 0, \dots, n$ und $b_{n+1} = 0$.

oder elegante Herleitung 'im Stück' (nicht nur lokal in eine Spalte gucken):

Die Spalten von links nach rechts mit $x^n \dots x^0$ multipliziert ergibt

(Zeile 1+ Zeile 2 = Zeile 3):

$$\begin{aligned}
 P_n(x) + x_0 P_{n-1}(x) &= x P_{n-1}(x) + P_n(x_0) \\
 \Leftrightarrow P_n(x) &= (x - x_0) P_{n-1}(x) + P_n(x_0) \\
 \text{bzw. } \frac{P_n(x)}{(x - x_0)} &= P_{n-1}(x) + \frac{P_n(x_0)}{(x - x_0)}.
 \end{aligned}$$

Polynom-Interpolation

Z A5 Ist $P(x) = x^2 - 2$ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen $\frac{x_i}{y_i} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{array} \right. ?$

Lösung: Ja! $P(0) = -2$, $P(1) = -1$, $P(2) = 2$ und der Polynomgrad ist 2, wie es bei 3 Stützstellen sein muss.

Kurvendiskussion

Z A6 Skizzieren Sie eine gebrochen rationale Funktion mit mindestens einer Nullstelle, Polstelle und Lücke sowie deren Asymptote. Lesen Sie danach die analytische Beschreibung, $f(x) = \dots$ aus dem Graphen ab.

Lösung: Z.B. $f(x) = 2 \cdot \frac{(x-1)^2(x-2)(x-4)}{(x+1)^2(x-3)(x-4)}$.

Partialbruchzerlegung

Z A7 Geben Sie die Partialbruchzerlegung folgender Funktion an:

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$$

Lösung: Z.B. $f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{4}{x+2} - \frac{2}{x+1}$

Exponential-Funktionen

A8 Sind Ihnen die folgenden Potenzgesetze klar

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, (a^x)^2 = a^{2x} \text{ bzw. } (a^x)^n = a^{nx} \text{ sowie } a^{1/2} = \sqrt{a} ?$$

Illustrieren Sie sich die Gesetze mit kleinen Beispielen, z.B. $2^{3+4} = \dots$