

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1 10. Woche – Nullstellensuche, Taylor-/Potenz-Reihen

Nullstellensuche: Bisektion und Newton-Verfahren

- Z A1** Zeichnen Sie eine im Intervall $[a, b]$ stetige, konvexe Funktion f mit $f' > 0$ und $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Angenommen Sie suchen die laut Zwischenwertsatz [Satz 3.55](#) existente Nullstelle, x_0 , iterativ (Start bei $x_0 = b$). Skizzieren Sie die Iterationen der numerischen Nullstellensuche mit
- (a) Bisektion (Intervallhalbierung), s. [Bem. 3.57](#)
 - (b) Newton-Verfahren [Kap. 4.5](#).
- A2** (a) Wenden Sie das Newton-Verfahren zur Nullstellensuche der Funktion $f(x) = x^2 - 2$ an. (Das ergibt die Iterationsvorschrift des in der VL erwähnten Heron-Verfahrens zum Wurzelziehen.)
- (b) Führen Sie mit den Startwert $x_0 = 1$ die ersten 3 Iterationen durch.

Lösung:

(a)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{2}{x_k} \right)$$

(b)

$$X_1 = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$X_2 = \frac{17}{12} \approx 1.4167$$

$$X_3 = \frac{577}{408} \approx 1.4142157$$

$$\sqrt{2} \approx 1.4142136$$

Taylorentwicklung und Potenzreihe

- A3** Stimmt folgendes?: Der Mittelwertsatz ([Satz 4.12](#)) gibt (nach $f(b) - f(a)$ umgestellt) das Restglied R_0 der Taylor-Entwicklung ([Satz 4.21](#)) der Funktion f um den Entwicklungspunkt a (ausgewertet an der Stelle b) an.

Lösung: Ja! :-)

$$\begin{aligned} R_0(x) &= f(x) - T_0(x) \\ &= f(x) - f(x_0) = f'(s)(x - x_0) \quad \text{mit } x := b, x_0 := a, s := x_0 \\ &= f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a) \end{aligned}$$

A4 Geben Sie eine Funktion $f(x)$ an, deren Taylor-Entwicklung (um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$)

Z a) $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$

b) $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ ist.

Lösung:

(a) $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} :-)$

(b) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} :-)$

A5 Was ist der Unterschied zwischen einer Taylor-Reihe und einer Potenzreihe?

Lösung: Gar keiner! ;-) Jede Taylor-Reihe ist eine Potenzreihe (und umgekehrt).

A6 Schreiben Sie die ersten 8 Summanden der Reihe für die komplexe Exponentialfunktion $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (s. [Def. 4.39](#)) für $z = ix$ auf und vergleichen Sie diese mit den jeweils ersten 4 Summanden der Taylor-Reihen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ (s. auch [F04_4](#)).

Lösung: Potenzreihe für $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ mit $z = ix$: $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$ usw.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \underline{ix} - \frac{x^2}{2!} - \underline{i \frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \underline{i \frac{x^5}{5!}} - \frac{x^6}{6!} - \underline{i \frac{x^7}{7!}} + \frac{x^8}{8!} \pm \dots \\ &= 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + 0 + \frac{x^8}{8!} \pm \dots \\ &\quad + i(0 + \underline{x} + 0 - \underline{\frac{x^3}{3!}} + 0 + \underline{\frac{x^5}{5!}} + 0 - \underline{\frac{x^7}{7!}} + 0 \pm) \dots \\ &= \cos(x) + i \sin(x) \end{aligned}$$

Wiederholung Geradengleichung

A7 Welcher der [drei Darstellungsformen einer Geradengleichung](#) entspricht:

$$\tau_{\vec{a}}(x) = \vec{f}(x_0) + \vec{f}'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad ?$$

Lösung: Punkt-Richtungs-Form - der Name ist nicht besonders sinnvoll, die Form schon.