

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

11. Woche – vorausschauendes Denken beim Integrieren

A1 Ableitung/Stammfunktion von Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind beim Integrieren/Differenzieren unkritisch (gehen auch wieder in Potenzfunktionen über). Machen Sie sich die einzige Ausnahme klar: welche Potenzfunktion führt beim Integrieren aus den Potenzfunktionen heraus?

Angenommen Sie integrieren über ein Produkt aus einer Potenzfunktion und $\ln(x)$. Durch welche Wahl ($\ln(x) = u$ oder $\ln(x) = v'$) werden Sie bei der partiellen Integration $\ln(x)$ geschickt los?

Lösung: $\ln(x) = u \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

A2 Überblick Funktionen und ihre Ableitungen

Sie lernen, dass man sich durch part. Integration vor einem 'unangenehmen' Produkt von Funktionen drücken kann, in dem man statt dessen das Integral über ein 'angenehmeres' Produkt von Funktionen berechnet.

Bei der Integration durch Substitution handelt man sich die Ableitung der Substitutionsvariable als Faktor im Integranden ein.

In beiden Fällen ist es nützlich, sozusagen vorausschauend im Kopf zu haben, wie die Ableitungen prinzipiell aussehen ($\frac{1}{x^2+\dots}$ oder $\frac{1}{\sqrt{x^2+\dots}}$). Verschaffen Sie sich durch Blick auf die [Liste der Grund-Integrale und -Ableitungen](#) einen Überblick, welche Funktionen eine Ableitung dieser Form haben.

Z A3 Logarithmische Integration = Spezialfall der Substitutionsregel

Für welche äußere Funktion f läuft die Integration durch [Substitution](#) auf [logarithmische Integration](#) hinaus?

Lösung: Für $f(x) = \frac{1}{x}$

A4 Stammfunktionen von Partialbrüchen mit kompl. Polstellen

Vollziehen Sie die Punkte 3) und 4) aus [VL 5.3](#) nach.

Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

- (a) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ (Tabelle nachgucken!)
- (b) $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1+(x/a)^2} dx = \dots$ (Substitution $t = x/a$!)
- (c) $\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \int \frac{1}{(x+p/2)^2+q-(p/2)^2} dx = \dots$ ((b) nutzen!)

Vergleichen Sie mit der [Liste der Grundintegrale](#) Nr. 11.

- (d) $\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx$ (Augen auf: Zähler ist Ableitung des Nenners)
- (e) $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx$ ((d) nutzen!)

Vergleichen Sie mit der [Liste der Grundintegrale](#) Nr. 10.

Und nun konkret:

- (f) $I = \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10} dx$
- (g) $I = \int \frac{1}{1+(x+3)^2} dx$
- Z (h) $I = \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$ (Augen auf: Ist das eine ECHT gebrochen rationale Funktion?)

Lösung:

- (f) $I = \ln(|x^2+6x+10|) + C$,
- (g) $I = \arctan(x+3) + C$
- (h) $I = x - \arctan(x) + C$

Partnerübung: Substitutionsregel & quadratische Ergänzung

A5 Sie: Wahl $F \xrightarrow{\frac{d}{dx}} f$; **Ihr Nachbar:** $f \xrightarrow{\int \dots dx} F$

- (a) Wählen Sie eine verkettete Funktion $F(x) = g(h(x))$, berechnen Sie deren Ableitung $f = F'$ und übergeben Sie **nur** $f(x)$ an Ihren Nachbarn, der $\int f dx = F + C$ ermittelt. Vergleichen Sie sein Ergebnis mit Ihrer Wahl.
- (b) Wählen Sie zwei reelle Zahlen $a \neq 0, b$ und formen Sie den Term $T = (x+b)^2 + a^2$ in die p,q-Form: $T = x^2 + px + q$ um. Übergeben Sie **nur** den Term in p,q-Form an Ihren Nachbarn, der durch quadratische Ergänzung wieder die ursprüngliche Form $T = (x+b)^2 + a^2$ ermittelt. Vergleichen Sie sein Ergebnis mit Ihrer Wahl.

Wiederholung Partialbruchzerlegung

A6 Ermitteln Sie die Partialbruchzerlegung zu Beispiel 5.16, z.B. auch unter Nutzung der 'Zuhalte-Methode' für einfache Pole, s. Zentralübung 5.

$$\frac{4t}{(1-t^2)(1+t^2)} = \dots$$

Lösung: S. VL5_3-Beispiel 5.16