

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

12. Woche – Fallen beim Integrieren: uneigentliche Integrale, u.a.

Z A1 Generalsubstitution

Leiten Sie ausgehend von $t = \tan \frac{x}{2}$ die bei der [Weierstraßschen Generalsubstitution](#) verwendeten Ersetzungen her:

- (a) $dx = \frac{2dt}{1+t^2},$
- (b) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$
- (c) $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$

Nutzen Sie dabei $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ bzw. $\cos^2 a = \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a + \cos^2 a} = \frac{1}{1 + \tan^2 a}.$

Z A2 Uneigentliche Integrale - welche existieren?

Fertigen Sie sich eine Übersicht an, welche Integrale aus [Bsp. 5.21](#) bei Integration 'über den Pol' und welche bei Integration 'bis $\pm\infty$ ' existieren.

Geben Sie an, für welche n das uneigentliche Integral

$$\int \frac{1}{x^n} dx, \quad n \in \mathbb{R}$$

bei Integration 'über den Pol' bzw. bei Integration 'bis $\pm\infty$ ' existiert.

Lösung: $n := -\alpha$ aus der VL; folglich (da $\alpha > -1 \Leftrightarrow -\alpha < 1$):

$$\int \frac{1}{x^n} dx \text{ existiert für Integration } \begin{cases} \text{über den Pol,} & \text{wenn } n < 1 \\ \text{bis } \pm\infty, & \text{wenn } n > 1 \end{cases}$$

A3 Integration von Partialbrüchen

Laut [F5.3](#) gibt es im Ergebnis der Partialbruchzerlegung Terme mit **1.** einfachen und **2.** mehrfachen reellen Polen sowie mit **3.** einfachen (und **4.** mehrfachen, s. [F3.3](#)) Paaren konjugiert komplexer Pole.

Ziehen Sie eine Konsequenz aus Aufgabe 2:

- (a) Bei welchen Partialbrüchen ist der Integrationsbereich unkritisch?
- (b) Bei welchen Partialbrüchen macht es einen Unterschied, ob 'über den Pol' bzw. bis ' $\pm\infty$ ' integriert wird?
- (c) Bei welchen Partialbrüchen geht beides nicht?

Lösung: (a) **3.** im Fall $\frac{A}{x^2+a^2}$ (und **4.**), (b) **2., 3.** im Fall $\frac{Ax+B}{x^2+a^2},$ (c) **1.**

A4 Parameterintegral

Wenden Sie die [Leibniz-Regel](#) auf folgendes 'Parameterintegral' an:

$$q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$\dot{q} = \frac{d}{dt}q(t) = \dots :)$$

Lösung: $\frac{d}{dt}q(t) = i(t)$. Offenbar ist die Leibniz-Regel verträglich mit dem Hauptsatz :).

Wiederholung: Logarithmus – Anwendung

A5 In der Klausur Nachrichtentechnik erhalten Sie folgenden

Hinweis:

x	0.1	0.25	1	1.5	2	3	5	10	100	1000
$\log_{10}(x)$		-0.6		0.2	0.3	0.5	0.7			

Wir haben ein paar Werte weggelassen, die Sie bitte selbst (ohne Taschenrechner) eintragen.

Lösung:

x	0.1	0.25	1	1.5	2	3	5	10	100	1000
$\log_{10}(x)$	-1	-0.6	0	0.2	0.3	0.5	0.7	1	2	3

A6 Zusatz: adaptiert aus einer Klausuraufgabe Nachrichtentechnik:

- (a) Gegeben ist die Sendeleistung $P_T = 30 \text{ kW}$ und die Definition des 'Leistungspegels' $L_P = 10 \log_{10}(P/P_{ref}) \text{ dBm}$ mit $P_{ref} = 1 \text{ mW}$. Berechnen Sie den Sendeleistungspegel L_T in dBm.
- (b) Berechnen Sie die Kanaldämpfung $L_{a_p} = 24 \text{ dB} + 30 \log_{10}(d/1 \text{ m}) \text{ dB}$ für den Abstand $d = 15 \text{ km}$.
- (c) Das Sendesignal aus Aufgabe a) wird nun durch den Kanal aus Aufgabe b) gedämpft. Berechnen Sie den sich daraus ergebenden Empfangsleistungspegel L_R in dBm.
Hinweis: 'Leistungs-Dämpfung' $a_P = \frac{\text{'gesendete Leistung'}}{\text{'empfangene Leistung'}}$ und $L_{a_P} = 10 \log_{10}(a_P) \text{ dB}$.
- (d) Geben Sie die Empfangsleistung P_R an, deren Pegel Sie in c) berechnet haben.

Lösung:

- (a) $L_T = 10 \log_{10}(30 \cdot 10^6 \text{ mW} / 1 \text{ mW}) \text{ dBm} = 75 \text{ dBm}$
- (b) $L_{a_p} = 24 \text{ dB} + 30 \log_{10}(15000 \text{ m} / 1 \text{ m}) \text{ dB} = 150 \text{ dB}$
- (c) $L_R = L_T - L_{a_p} = -75 \text{ dBm}$
- (d) $P_R = 10^{-7.5} \text{ mW} = 10^{(-8+0.5)} \text{ mW} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ mW} \dots$

Wiederholung: Taylor1 = Tangente = Linearisierung

A7 (a) Skizzieren Sie die Funktionen

$$(i) \quad f(x) = e^x = \exp(x), \quad (ii) \quad g(x) = e^{-x}, \quad (iii) \quad h(x) = 1 - e^{-x}$$

(b) Skizzieren Sie die Funktionen

$$(i) \quad f(t) = K e^{\frac{t}{\tau}} = K \exp\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad (ii) \quad g(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (iii) \quad h(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

(c) Geben Sie das Taylorpolynom 1. Ordnung für die Funktionen in (b) (i) - (iii) an einer beliebigen Entwicklungsstelle t_0 an und skizzieren Sie dessen Graph (zu (b) hinzu zeichnen!).

(d) Ermitteln Sie, für welches t Ihre Gleichungen aus (c) den Wert (i) 0, (ii) 0 bzw. (iii) K annehmen¹.

Lösung:

(a) s. Übung 1, Aufgabe 1 b),

(b) s. a) adaptieren,

(c) Graph = Tangente bei t_0 an Graphen aus (b),

(d) für (i) $t - t_0 = -\tau$, (ii) $t - t_0 = \tau$ bzw. (iii) $t - t_0 = \tau$, s. auch Bild 1.

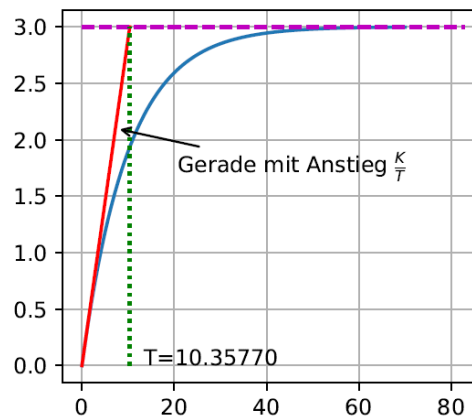


Figure 1: Situation für iii) mit $K = 3, \tau = 10$ bei $t_0 = 0$.

¹Dieses Know-How wird in der Regelungstechnik angewendet, um die so genannte Zeitkonstante τ eines speziellen Systems aus seinem Ausgangssignal abzulesen.