

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

13. Woche – Vektorraum

A1 Basis - linear unabhängig

Ordnen Sie die Worte 'mindestens', 'höchstens' oder 'genau' folgenden Aussagen zu:

Lösung:

Eine Menge von Vektoren, die

- (a) eine **Basis** des $\mathbb{R}^n$ ist, hat **genau** n Vektoren.
- (b) (im $\mathbb{R}^n$) **linear unabhängig** ist, hat **höchstens** n Vektoren.

A2 Geben Sie Dimension und eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Höchstgrad 3, $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ an. Was ist der Nullvektor?

Lösung:

$\dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})) = 4$,

Basis: $\underline{v}^1 = x \mapsto 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$, $\underline{v}^2 = x$, $\underline{v}^3 = x^2$, $\underline{v}^4 = x^3$, $\underline{0} = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

$$\underline{v}^1 = x \mapsto 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$$

$$\underline{v}^2 = x \mapsto x$$

$$\underline{v}^3 = x \mapsto x^2$$

$$\underline{v}^4 = x \mapsto x^3$$

$$\underline{0} = x \mapsto 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

Z A3 Gegeben sind die Vektoren $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Skizzieren Sie die lineare Hülle $\text{span}(\underline{v}^1)$ des Vektors $\underline{v}^1$.
- (b) Skizzieren Sie die lineare Hülle $\text{span}(\underline{v}^1, \underline{v}^2)$ der Vektoren $\underline{v}^1, \underline{v}^2$.

Lösung: a) Gerade entlang $\underline{v}^1$, b) der ganze $\mathbb{R}^2$:-).

A4 Die Vektoren $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Bestimmen Sie die Koordinaten α_1, α_2 des Vektors $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzgl. dieser Basis, d.h. gesucht sind α_1, α_2 so, dass $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}^1 + \alpha_2 \underline{v}^2$ gilt.

Veranschaulichen Sie die Situation konkret für $\underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ grafisch.

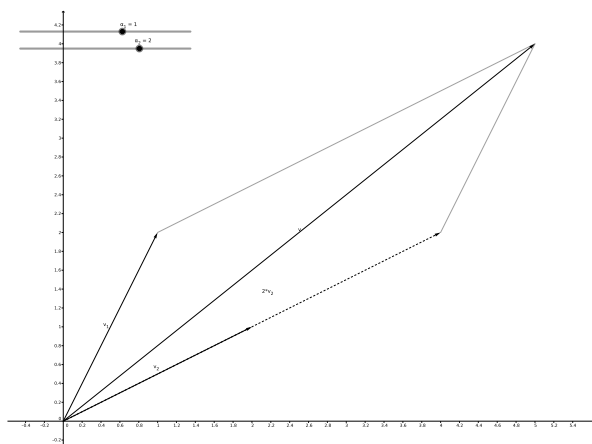
Lösung: $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}^1 + \alpha_2 \underline{v}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 & + & \alpha_2 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(2) \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\alpha_1 \text{ eliminiert: } \rightarrow 2x - y = (2 - 2)\alpha_1 + (4 - 1)\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = \frac{2x - y}{3}$$

$$\alpha_2 \text{ eliminiert: } \rightarrow 2y - x = (4 - 1)\alpha_1 + (2 - 2)\alpha_2 \rightarrow \alpha_1 = \frac{2y - x}{3}$$

$$\text{für } x = 5, y = 4 \rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$$



A5 Vollziehen Sie die drei Gleichungen $\underline{e}_{k\dots} = \dots$ in [TET2 S. 96](#) nach.

Lösung: Mit Hingucken: ✓

A6 Zusatz: In [VL 6.3](#) wird der Cosinussatz verwendet um zu beweisen, dass für das Skalarprodukt gilt:

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = |\underline{u}| |\underline{v}| \cos(\angle \underline{u}, \underline{v}).$$

In Aufgabe Ü3/2.1.23 wird hingegen erwartet, den Kosinussatz mit Hilfe des Skalarprodukts zu beweisen. Das wäre zusammen ein verbotener Ringschluss:

Aus A folgt B und aus B folgt A, damit beißt sich die Katze in den Schwanz und weder A noch B sind bewiesen.

Beweisen Sie den Kosinussatz (OHNE Verwendung des Skalarprodukts ;-)), wie in der VL empfohlen unter Verwendung einer Höhe, z.B.:

$$h^2 = \dots (\text{Pythagoras in einem Teildreieck}) = \dots (\text{Pythagoras im anderen Teildreieck})$$

Lösung:

$$\begin{aligned} h^2 &= c^2 - (a - b \cos \alpha)^2 = b^2 - (b \cos \alpha)^2 \\ &\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

A7 Skalarprodukt in TET

Gegeben ist ein Vektor $\underline{k} \in \mathbb{R}^3$. Für welche Orte $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\underbrace{\langle \underline{k}, \underline{r} \rangle}_{=: \underline{k} \cdot \underline{r}} = \text{const} ?$$

Lösung: Eine Ebene senkrecht zu $\underline{k}$, s. [TET2 S. 34](#).

Z A8 Kreuzprodukt in EMF

Im 2. Semester lernen Sie im Fach 'Elektrische und magnetische Felder' (EMF) das ebene Magnetfeld (magnetische Feldstärke $\underline{H}$) eines (idealisiert) unendlich langen Stromleiters kennen:

$$\underline{H}(\underline{r}) = \frac{I}{2\pi \|\underline{r}\|^2} \cdot \underline{e}_L \times \underline{r},$$

wobei $\underline{e}_L$ der Einheitsvektor (oder der auf Länge=1 normierte Vektor) in Richtung des Stromflusses ist und $\underline{r}$ der Vektor vom Leiter zum 'Ort' $\underline{r}$ (der 'Ortsvektor') ist, dessen Feldstärke mit $\underline{H}(\underline{r})$ angegeben wird.

Geben Sie die magnetische Feldstärke für einen Strom $I = 3\text{A}$ 'entlang der z-Achse' an den Orten

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}, \underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \text{ und } \underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ m an.}$$

Zeichnen Sie die Situation für einen Kreis (um den Ursprung) mit Radius 3m in der x-y-Ebene.

Lösung:

$$\underline{H} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \right) = \frac{3\text{A}}{2\pi(3\text{m})^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$\text{analog } \underline{H} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \right) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad \text{und} \quad \underline{H} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ m} \right) = \underline{0}.$$

Magnetfeld umkreist den Strom entgegen des Uhrzeigersinns: rechte Hand: Daumen=Strom, Finger=Magnetfeld.

A9 Zusatz: Gegeben ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(\underline{x}, \underline{y}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2 \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Unter welchen Bedingungen (an die Koeffizienten a, b, c) ist diese Abbildung ein (evtl. nicht-euklidisches) Skalarprodukt, s. [F6.3](#)?

Lösung:

- Symmetrie: mit 'Hingucken' ✓
- Additivität: mit 'Hingucken' ✓
- Homogenität: mit 'Hingucken' ✓
- Positiv definit: $f(\underline{x}, \underline{x}) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \stackrel{!}{>} 0$ (*) für $\underline{x} \neq 0$:
Wie man leicht sieht, sind notwendige Bedingungen $a, c > 0$ (sonst wäre (*) schon mit $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ nicht erfüllt).
(*) · a liefert:

$$a^2x_1^2 + 2abx_1x_2 + acx_2^2 > 0 \quad (0.1)$$

$$\Leftrightarrow (ax_1 + bx_2)^2 + (ac - b^2)x_2^2 > 0 \quad | \text{quadratische Ergänzung} \quad (0.2)$$

$$\Leftrightarrow (ac - b^2) > 0 \quad (0.3)$$

f ist ein Skalarprodukt genau dann, wenn $a, c > 0 \wedge (ac - b^2) > 0$.

Bemerkung Sie werden später genau diese Bedingungen $a, c > 0 \wedge (ac - b^2) > 0$ für die positive Definitheit von Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ kennen lernen. Freuen Sie sich auf quadratische Formen ...

Wiederholung+Ausblick: Integration

A10 Zusatz: In der Vorlesung Theoretische Elektrotechnik werden Sie folgendes Integral vorfinden, s. [TET1 Seite134](#) wobei $\sigma(\cdot)$ und $P_1(\cdot)$ gegebene Funktionen sind:

$$\int_{-1}^1 \sigma(\vartheta) P_1(\cos(\vartheta)) d \cos(\vartheta) \quad \text{wobei } d \cos(\vartheta) = \frac{d}{d \vartheta}(\cos(\vartheta)) d \vartheta$$

Hier wurde die [Substitutionsregel](#) quasi 'halb angewendet'. Notieren Sie das Integral 'ganz substituiert' (mit $t = \cos(\vartheta)$) bzw. 'nicht substituiert':

$$\int_{t=-1}^1 \dots dt = \int_{-1}^1 \sigma(\vartheta) P_1(\cos(\vartheta)) d \cos(\vartheta) = \int_{\vartheta=\pi}^0 \dots d \vartheta$$

Lösung:

$$\int_{t=-1}^1 \sigma(\arccos(t)) P_1(t) dt = \int_{-1}^1 \sigma(\vartheta) P_1(\cos(\vartheta)) d \cos(\vartheta) = \int_{\vartheta=\pi}^0 \sigma(\vartheta) P_1(\cos(\vartheta)) \sin(\vartheta) d \vartheta$$