

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

14. Woche – analytische Geometrie

A1 Hessesche Normalform im $\mathbb{R}^2$

Sie haben in der Def. 6.44 die Hessesche Normalform

$$\langle \underline{x}, \underline{n} \rangle = d \quad (*)$$

zur Beschreibung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ kennen gelernt. Welches Gebiet beschreibt die Gleichung im $\mathbb{R}^2$, z.B.

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \right\rangle = 2?$$

Lösung: Das ist die **parameterfreie Darstellung der Gerade** im $\mathbb{R}^2$: $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 2$, die senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ verläuft und den Abstand 2 zum Koordinatenursprung hat.

Z A2 Achsenabschnitte

Teilt man die Gleichung (*) durch d , erhält man

$$\left\langle \underline{x}, \frac{\underline{n}}{d} \right\rangle := \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (**)$$

Machen Sie sich klar, an welchen Punkten die durch (**) beschriebene Ebene die Achsen (x-Achse, ...) schneidet. (Für $y = z = 0 \rightarrow x = \dots$)

Lösung: Die x-Achse wird bei $x = a$ geschnitten, die y-Achse bei $y = b \dots$ Daher nennt man (**) auch die Achsenabschnittsform.

Z A3 Schnitt: Gerade - Ebene

Sie wollen den Durchstoßpunkt einer Geraden g durch eine Ebene E ermitteln. Überlegen Sie sich die Anzahl der Unbekannten und die Anzahl der Gleichungen, die Sie ansetzen, wenn Sie

- (a) die Parameterdarstellung der Geraden mit der Parameterdarstellung der Ebene vereinigen bzw.
- (b) die Parameterdarstellung der Geraden in die parameterfreie (Hessesche Normalform) Darstellung der Ebene einsetzen.

Lösung:

- (a) $\underline{x} = \underline{r}^g + \lambda \underline{s} = \underline{r}^E + t_1 \underline{s}^1 + t_2 \underline{s}^2 \rightarrow 3$ Unbekannte (λ, t_1, t_2) und 3 Gleichungen: 1 Vektorgleichung = 3 'skalare' Gleichungen.

- (b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{r}^g + \lambda \underline{s}$ in die Gleichung der Ebene $ax + by + cz = 1$ einsetzen $\rightarrow$ eine Gleichung mit einer Unbekannten (λ) .

A4 Abstand zweier Geraden = 0

Betrachten Sie die Berechnung des Abstandes zwischen zwei Geraden [VL 6.5 S.3](#).
Deuten Sie den Fakt

$$[\underline{s}^0, \underline{s}^1, \underline{r}^1 - \underline{r}^0] = \langle \underline{s}^0 \times \underline{s}^1, \underline{r}^1 - \underline{r}^0 \rangle = 0$$

Hinweis: Sie könnten die Phrasen verwenden:

'Die Projektion von ... auf ... ist Null' oder

'... liegt in der von ... und ... aufgespannten Ebene' oder

'... und ... und ... sind linear abhängig'.

Bemerkung: $\underline{s}^0 \times \underline{s}^1$ nennt man die Gemeinnormale (die gemeinsame Normale) der beiden Geraden.

Wiederholung + Anwendung Integration Einheiten

A5 Aus [Folie 5.1 S.3](#) ist klar, dass die Einheit eines Integrals = der Einheit des Integranden mal Einheit des Differenzials ist. Rekapitulieren Sie dies z.B. an Aufgabe 12.3a und an den Integralen $W = \int F \, ds$ sowie $W = \int u(t)i(t) \, dt$.

Manchmal kann man auch aus der Einheit von Integral und Differenzial auf die Einheit des Integranden schließen: Schließen Sie aus $U_{AB} = \int_A^B E \, dr$ ¹ auf die Einheit des elektrischen Feldes E , s. auch [ET2 Folie 1-15](#)

Lösung:

- 12.3a: $V = \int Qv(t) \, dt$: $[V] = [Qv(t)] \cdot [dt] = m^2 \frac{m}{s} \cdot s = m^3$,
- $W = \int F \, ds$: $[W] = [F] \cdot [ds] = N \cdot m = Nm$,
- $W = \int u(t)i(t) \, dt$: $[W] = [u][i] \cdot [dt] = VA \cdot s = VAs = Ws$,
- $U_{AB} = \int_A^B E \, dr$: $[U] = [E] \cdot [dr] \Leftrightarrow V = [E] \cdot m \Rightarrow [E] = \frac{V}{m}$.

Wiederholung + Anwendung Projektion

A6 Zusatz: In Aufgabe 2.1.13 haben wir die Zerlegung eines Vektors $\mathbf{a}$ in zwei Vektoren $\mathbf{a}_{\parallel b}$ und $\mathbf{a}_{\perp b}$ mit $\mathbf{a}_{\parallel b} + \mathbf{a}_{\perp b} = \mathbf{a}$ einfach gelöst durch:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{a}_b = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} \underset{\mathbf{e}_b := \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}}{=} \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_b \rangle \mathbf{e}_b = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b) \mathbf{e}_b \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel} \quad (*)$$

In der LV Theoretische Elektrotechnik finden Sie für das gleiche Problem quasi folgende Lösung, s. [TET1 Seite 217](#):

$$\mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b) \mathbf{e}_b \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_{\perp} = -\mathbf{e}_b \times (\mathbf{e}_b \times \mathbf{a}) \quad (**)$$

Überführen Sie (**) in (*) durch Anwendung der [BAC-CAB-Formel](#) für 'wiederholtes Kreuzprodukt'.

¹Gilt für $\underline{E} \parallel \underline{r}$

Lösung:

$$\mathbf{a}_\perp = - \underbrace{\mathbf{e}_b}_A \times \left(\underbrace{\mathbf{e}_b}_B \times \underbrace{\mathbf{a}}_C \right) = C(AB) - B(AC) = \mathbf{a} \underbrace{(\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{e}_b)}_{=1} - \underbrace{\mathbf{e}_b(\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{a})}_{=\mathbf{a}_\parallel} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel \quad \checkmark$$

Bemerkung Das Wesentliche an der BAC-CAB-Formel:

Während das Kreuzprodukt $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ senkrecht zu $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ ist, liegt das Kreuzprodukt mit diesem Kreuzprodukt $\dots \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ wieder in der von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ aufgespannten Ebene, ist also eine Linearkombination von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$.