

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1

15. Woche – Matrizen, lineare Gleichungssysteme, Rang

A1 Matrizen: Dimension und Produkt In dieser Aufgabe geht es um Know-How, was Sie im Fach Systemtheorie (3.+4. Semester) benötigen werden.

(a) Sie sehen zwei Gleichungen: eine vektoriell die andere skalar.

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + B \cdot x$$
$$y = C \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + D \cdot x \quad \text{mit } x, y, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

Geben Sie die (einzig sinnvollen) Dimensionen der Matrizen A, B, C, D an.

(b) Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad -3), \quad D = 1$$

Geben Sie die Matrizen $sE - A$ und $(sE - A)^{-1}$ an; dabei ist E die Einheitsmatrix und s eine komplexe Variable (die Sie nicht stört :-)).

Berechnen Sie nun $C(sE - A)^{-1}B + D$.

Hinweis: Vektoren sind auch nur Matrizen und werden genauso multipliziert, s. [Bem. 7.13](#).

Bemerkung: Im Jahrgang 2018 hatten ca. 90% der Studenten in einem Kurztest in Systemtheorie Schwierigkeiten mit den hier benötigten Matrizenoperationen (Matrix $\cdot$ Vektor ...). Wir hoffen, dass es Ihnen nicht so gehen wird!

Lösung:

(a) $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, C \in \mathbb{R}^{1 \times 2}, D \in \mathbb{R}$.

(b)

$$sE - A = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}, \quad (sE - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C(sE - A)^{-1}B + D &= (2 \quad -3) \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \\ &= (2 \quad -3) \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} 0 \\ s+1 \end{pmatrix} + 1 \\ &= \frac{-3(s+1)}{(s+1)(s+2)} + 1 = \frac{s-1}{s+2} \end{aligned}$$

Z A2 LGS im $\mathbb{R}^2$

Gegeben ist die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1 \\ 3 & a & b \end{array}\right)$$

Geben Sie entsprechend [Satz 7.23](#) Bedingungen für $a, b \in \mathbb{R}$ an, so dass das zugehörige lineare Gleichungssystem

- (a) genau eine Lösung hat,
- (b) keine Lösung hat bzw.
- (c) unendlich viele Lösungen hat.

Veranschaulichen Sie die Situation in (b) und (c) graphisch, indem Sie die durch die beiden Gleichungen beschriebenen Geraden $g_1 : 2x + 4y = 1, g_2 : 3x + \dots$ zeichnen.

Lösung:

- (a) $a \neq 6$ (b egal),
- (b) $a = 6, b \neq 3/2$: beide Geraden parallel,
- (c) $a = 6, b = 3/2$: beide Geraden sind identisch.

A3 Rang der transponierten Matrix

Bestimmen Sie den Rang der transponierten Koeffizientenmatrix A^T aus ([Beispiel 7.20](#)) durch Überführung in Zeilenstufenform R .

Lösung:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Rang}(A^T) = \text{Rang}(R) = 2$$

Bemerkung: Die Anzahl linear unabhängiger Zeilen einer Matrix ist **immer gleich** der Anzahl linear unabhängiger Spalten - daher das 'oder' in der Rang-Definition (VL 7.4 7.21)

A4 $\Leftrightarrow$ **oder** $\Rightarrow$ **oder** $\Leftarrow$

Gegeben sind die fünf Aussagen über eine **quadratische** Matrix A :

- (a) 'Die Matrix A ist regulär.'
- (b) 'Die Matrix A ist invertierbar.'
- (c) ' $\det A \neq 0$.'
- (d) 'Die Zeilen der quadratischen Matrix A sind linear unabhängig.'
- (e) 'Die Spalten der quadratischen Matrix A sind linear unabhängig.'

Setzen Sie zwischen diese Aussagen die richtigen Verknüpfungen

Lösung:

$$a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c \Leftrightarrow d \Leftrightarrow e$$

A5 Kindergartenrätsel

Sie kennen vielleicht schon dieses Rätsel, das Vorschulkinder angeblich schneller lösen können als wir: [Rätsel](#).

Sie können es mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems lösen: Das Vorschulkind zählt nämlich einfach nur gewisse 'Bedeutungen' der Ziffern. Die 1. Zeile $9313 = 1$ liest sich also: 'Bedeutung von 9 + Bedeutung von 3 + Bedeutung von 1 + Bedeutung von 3 = 1'. Sei $\underline{x} = (x_0 \dots x_9)$ der Vektor der unbekannten Bedeutungen der Ziffern 0 bis 9, dann wird das Problem durch das lineare Gleichungssystem mit folgender erweiterten Koeffizientenmatrix beschrieben:

$$(A | \underline{b}) = \left(\begin{array}{cccccccccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Schönerweise ist $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\underline{b}) = 9$.

- (a) Geben Sie die Dimension der homogenen Lösung $\underline{x}_h$ an.
- (b) Sie können an der Koeffizientenmatrix A die homogene Lösung sehen: welches x_i (die Bedeutung welcher Ziffer) ist durch dieses Gleichungssystem beliebig (nicht bestimmt)?
- (c) Sie können die Lösung z.B. mit diesem [Matlab-Skript](#) mit [Zutat](#) ermitteln oder weiter rätseln ;-)

Lösung:

- (a) Die homogene Lösung $\underline{x}_h$ ist $n - \text{Rang}(A|b) = 10 - 9 = 1$ -dimensional.
- (b) Die 5. Spalte der Koeffizientenmatrix A ist $\underline{0} \Rightarrow x_4$ (die 'Bedeutung' der Ziffer 4, die kam gar nicht vor) ist durch dieses Gleichungssystem nicht bestimmt $\Rightarrow \underline{x}_h = t \cdot \underline{e}^5$.
- (c)

$$\begin{array}{c|cccccccccc} i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline x_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Z A6 Cramersche Regel Mitunter (z.B. in ET1) wird die [Cramersche Regel](#), [Wiki](#) zur Lösung eines (kleinen) linearen Gleichungssystems verwendet. Dabei wird eine der Unbekannten als Quotient zweier Determinanten berechnet.

Wir wollen die Cramersche Regel verstehen und betrachten das Beispiel:

$$A\underline{x} = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \underline{a} + x_2 \underline{b} + x_3 \underline{c} \stackrel{(*)}{=} \underline{d}, \quad \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \in \mathbb{R}^3$$

- (a) Warum ist die Determinante folgender Matrizen gleich Null?

$$\det(\underline{b}, \underline{b}, \underline{c}) = 0 \text{ und } \det(\underline{c}, \underline{b}, \underline{c}) = 0$$

- (b) Nutzen Sie die Linearität der Determinante

$$\det(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}, \dots) = \alpha \det(\underline{a}, \dots) + \beta \det(\underline{b}, \dots)$$

um folgende Determinante durch Verwendung von (*) in die Summe von 3 Determinanten umzuwandeln:

$$\det(\underline{d}, \underline{b}, \underline{c}) = \dots + \dots + \dots \quad (**)$$

- (c) Stellen Sie (**) unter Verwendung von (a) nach x_1 um.
Das ist die Cramersche Regel zur Berechnung einer Unbekannten (hier x_1) im linearen Gleichungssystem. Zur Berechnung von x_i muss die 'rechte Seite' (hier $\underline{d}$) anstelle der i-ten Spalte in die Koeffizientenmatrix eingesetzt werden.

Lösung:

- (a) Der von den Vektoren $\underline{b}, \underline{b}, \underline{c}$ aufgespannte Spat hat das Volumen Null bzw. die Vektoren sind linear abhängig ...

- (b)

$$\det(\underline{d}, \underline{b}, \underline{c}) = x_1 \det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) + x_2 \underbrace{\det(\underline{b}, \underline{b}, \underline{c})}_{=0} + x_3 \underbrace{\det(\underline{c}, \underline{b}, \underline{c})}_{=0}$$

$$(c) \quad x_1 = \frac{\det(\underline{d}, \underline{b}, \underline{c})}{\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})} = \frac{\det(\underline{d}, \underline{b}, \underline{c})}{\det A}$$

A7 LGS in ET1 Gegeben sind zwei Gleichungen (resultierend aus der Knotenspannungsanalyse einer Schaltung):

$$\begin{aligned} U_{10}2G - U_{20}G &= I_q \\ -U_{10}G + U_{20}3G &= U_qG - I_q \end{aligned}$$

wobei G, I_q, U_q als gegebene Konstanten zu betrachten sind.

- (a) Geben Sie die Koeffizienten-Matrix A (der LGS-Form $A\underline{x} = \underline{b}$) sowie deren Determinante an.
- (b) Bestimmen Sie U_{10} mit Hilfe der Cramerschen Regel, s. A6.

Lösung:

- (a) $A = \begin{pmatrix} 2G & -G \\ -G & 3G \end{pmatrix}, \det(A) = 5G^2,$
- (b) $U_{10} = \frac{\det(\dots)}{5G^2} = \frac{2I_q + U_qG}{5G}.$

A8 LGS in TM: in Anlehnung an Aufgabe 1.1.9 Übungsheft Statik

Gegeben:

$$\underline{F}_1 = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}, \underline{F}_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ -30 \end{pmatrix}, \underline{F}_3 = \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \end{pmatrix}, \underline{F}_4 = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix} \cdot F_4, \underline{F}_5 = \begin{pmatrix} -\cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix} \cdot F_5 \text{ und } \sum_{i=1}^5 \underline{F}_i = \underline{0} \quad (*).$$

Gesucht: F_4, F_5 .

Bringen Sie (*) in die LGS-Form $A\underline{x} = \underline{b}$, wobei $\underline{x}$ der Vektor der Unbekannten ist.

Woran erkennen Sie, dass das LGS eine eindeutige Lösung hat?

Lösung: $A = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \sin 60^\circ \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} F_4 \\ F_5 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \end{pmatrix}.$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ LGS hat eindeutige Lösung.

A9 Gleichungssystem in Theoretischer Elektrotechnik 1 (TET1)

An Anlehnung an die Lösung der Aufgabe 7.5 (TET1): Gegeben sind zwei Funktionen:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= C_1 \sin(kx) \sinh(ky) \\ \Phi_2 &= C_2 \sin(kx) \exp(-ky)\end{aligned}$$

deren Konstanten C_1, C_2 durch folgende Bedingungen festgelegt werden:

$$\Phi_1|_{y=b} = \Phi_2|_{y=b} \quad (0.1)$$

$$\varepsilon \frac{c}{2} \left(C_1 \frac{d}{dy} \sinh(ky) \Big|_{y=b} - C_2 \frac{d}{dy} \exp(-ky) \Big|_{y=b} \right) = Q \sin(ka) \quad (0.2)$$

wobei k, a, b, c, Q als gegebene Konstanten zu betrachten sind.

- (a) Klassifizieren Sie das aus 0.1-0.2 resultierende Gleichungssystem (linear/nichtlinear, homogen/inhomogen)!
- (b) Falls es sich um ein lineares Gleichungssystem handelt: Geben Sie die Koeffizienten-Matrix A (der LGS-Form $A\underline{x} = \underline{b}$) sowie deren Determinante an.

Zusatz: Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel, s. A6.

Lösung:

- (a) linear, inhomogen.

$$\begin{aligned}(b) \quad A &= \begin{pmatrix} \sinh(kb) & -\exp(-kb) \\ \varepsilon \frac{c}{2} k \cosh(kb) & \varepsilon \frac{c}{2} k \exp(-kb) \end{pmatrix}, \\ \det(A) &= \varepsilon \frac{c}{2} k \exp(-kb) \det \begin{pmatrix} \sinh(kb) & -1 \\ \cosh(kb) & 1 \end{pmatrix} = \varepsilon \frac{c}{2} k \exp(-kb) \exp(kb) = \varepsilon \frac{c}{2} k.\end{aligned}$$

A10 Kern in der Regelungstechnik

Bestimmen Sie den **Kern** der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, s. Bem. 7.26.

Lösung: siehe auch RT2_VL4_F20:

$$\ker(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$