

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

1. Woche – Eigenwerte / Eigenvektoren / Kegelschnitt

A1 Weltformel für diagonalisierbare Matrizen¹ $A = S\Lambda S^{-1}$ (s. 7.55)

Betrachtet wird die lineare Abbildung $\underline{y} = A\underline{x}$. Gegeben sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ sowie die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Matrix A . Bitte alles Folgende auch skizzieren!

(a) Geben Sie das Bild $\underline{y} = A\underline{v}^1$ des Vektors $\underline{v}^1$ an.

(b) Geben Sie das Bild $\underline{y} = A\underline{x}$ des Vektors $\underline{x} = 1 \cdot \underline{v}^1 + 3 \cdot \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ an.

(c) Geben Sie die Matrix A an.

Lösung:

(a) $A\underline{v}^1 = \lambda_1 \underline{v}^1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) Überlagerungsgedanke (= Linearität):

$$A\underline{x} = \lambda_1 \cdot 1 \underline{v}^1 + \lambda_2 \cdot 3 \underline{v}^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) S. 7.55+56 : $\Lambda = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ mit $S = (\underline{v}^1 \quad \underline{v}^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
 $\rightarrow A = S \cdot \Lambda \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Man kann sich gern nochmal überzeugen, dass A tatsächlich die vorgegebenen Eigenwerte/Eigenvektoren hat.

Z A2 LGS - EW/EV - für fortgeschrittene Studenten

Schreiben Sie die Gleichung $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$ (*) als lineares Gleichungssystem in der Form

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (**) \quad (\text{s. Bem. 7.13})$$

Sie wissen (wann ist das Kreuzprodukt $= 0$?), dass (*) und damit auch (**) die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (***)$$

¹Diagonalisierbare Matrizen spielen bei der so genannten **Jordan-Normalform in der Regelungstechnik** eine Rolle.

hat. Denken Sie jetzt einmal 'in linearen Gleichungssystemen': Was wissen Sie durch (***) über den Rang der Koeffizientenmatrix M (Sie können es auch per Gauß-Algorithmus überprüfen)?

Und denken Sie jetzt 'in Eigen-werten/-vektoren': Was wissen Sie durch (***) über mindestens einen Eigenwert von M ? Bringen Sie 'beides Denken' auf einen Nenner!

Lösung:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}}_M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(***) \Rightarrow \begin{cases} \text{Rang}(M) < 3 & \text{LGS-Denke} \\ \lambda_1 = 0 & \text{EW-Denke} \end{cases}$$

Gemeinsamer Nenner: $\det M = 0 \Leftrightarrow$ Mindestens ein Eigenwert(M) ist gleich Null.

Z A3 Kegelschnitt Hyperbel

Der Graph der Funktion $y = \frac{1}{x}$ (1) wird Hyperbel genannt.

Bei Kegelschnitten wird jedoch bei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (2) von einer Hyperbel gesprochen.

Überzeugen Sie sich, dass (1) in geeigneten neuen Koordinaten in (2) übergeht.

- Zeichnen Sie den Graphen von (1) in ein kartesisches Koordinatensystem!
- Drehen Sie das Blatt solange, bis der Graph wie eine 'übliche' nach rechts/links geöffnete Hyperbel aussieht, und zeichnen Sie die 'neuen' Achsen für x' und y' ein.
- Blatt zurückdrehen und 'neue' Einheitsvektoren in 'alten' Koordinaten ablesen. Diese werden in die Transformationsmatrix S als Spalten eingetragen:
 $\underline{x}_{\text{alt}} = S \cdot \underline{x}_{\text{neu}}$ (3) (analog $\underline{x} = S\underline{y} \Leftrightarrow \underline{y} = S^T \underline{x}$, wenn S orthogonal, vgl. [Bem. 7.58](#) (bzw. [Bem. 7.61](#): $\underline{y} = Q^T \underline{x}$ oder [7.65](#): $\underline{y} = A\underline{x} \dots$).
- Es gilt $\underline{x}_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\underline{x}_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Geben Sie mit Hilfe von (3) x und y als Funktion von x' und y' an.
- Setzen Sie dies in (1) ein und bringen es in die Form $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Geben Sie a und b an und vergleichen Sie mit Scheitel und Asymptote der Hyperbel im 'neuen' Koordinatensystem (Blatt wieder drehen).

A4 Kegelschnitt grafisch

Zeichnen Sie die folgenden Kegelschnitte in ein Koordinatensystem:

$x^2 - y^2 = 1$, $y^2 - x^2 = 1$, $(x-1)^2 - (y-2)^2 = 1$, $\frac{x^2}{2^2} - y^2 = 1$, $x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 1$ (Asymptote mit zeichnen)

A5 Orthogonale Matrix

Geben Sie für die Matrix $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ die Inverse Q^{-1} , ihre Transponierte Q^T sowie $Q^T \cdot Q$ an. Ist Q eine orthogonale Matrix, d.h. bilden ihre Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis (ONB)?

A6 Kompl. EW - Drehung

Betrachtet wird die Abbildung $\underline{y} = A \cdot \underline{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Geben Sie das Bild des Einheitsvektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an und zeichnen Sie beide Vektoren (Einheitsvektor und sein Bild) in ein Koordinatensystem. Wiederholen Sie das Gleiche für den Einheitsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (b) Beschreiben Sie die Wirkung der Matrix/Abbildung (Drehung, Streckung).
- (c) Berechnen Sie nun die Eigenwerte der Matrix A .
- (d) Geben Sie Betrag und Winkel der Eigenwerte an und vergleichen mit (b).
- (e) Schreiben Sie A als Element von $C = \{aE + bI : a, b \in \mathbb{R}\}$ s. [Bsp. 7.12](#).
Wie hängen a und b mit den Eigenwerten zusammen und wie lautet die zu A gehörige komplexe Zahl z ?
- (f) Modifizieren Sie A so, dass durch die Abbildung $\underline{y} = A_{neu} \cdot \underline{x}$ nur eine Drehung (und keine Streckung) realisiert wird (s. ggf. [7.65](#) oder [7.68](#)).

Lösung:

- (b) Streckung um $\sqrt{5}$, Drehung um $-\arctan(1/2)$.
- (c) $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$
- (d) $|\lambda| = \sqrt{5} = \text{Streckungsfaktor}$, $\arg(\lambda) = \pm \arctan(1/2) \stackrel{(*)}{=} \text{Winkel, um den die (Abbildung durch die) Matrix dreht.}$
- (e) $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, $a = 2$, $b = 1$, $z = 2 - i$
- (f) $A_{neu} = \frac{1}{\sqrt{5}}A$.

Bemerkung: (*) gilt leider nur, wenn Re und Im der konjugiert komplexen Eigenvektoren zueinander orthogonal sind (das ist hier der Fall). Die ganze Wahrheit ist etwas komplexer - nur etwas ;-).