

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

2. Woche – Stetigkeit, partielle Ableitungen und 'Wann gilt Satz von Schwarz?'

A1 Stetig in $(x, y) = (0, 0)$?

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen

$$u = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
$$v = \begin{cases} \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ ?, & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit in $(0, 0)$, indem Sie

- (a) Polarkoordinaten nutzen: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ und
- (b) den Grenzwert $\lim_{r \rightarrow 0}$ betrachten und
- (c) evtl. den Grenzwert $\lim_{r \rightarrow 0}$ für $\varphi = 0$ sowie für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ betrachten.

A2 fröhliches Ableiten

Überzeugen Sie sich, dass für u aus Aufgabe 1

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u = v \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

gilt (Satz von Schwarz).

A3 fröhliches Ableiten $\Rightarrow$ Huch?! (weiter mit u aus Aufgabe 1)

- (a) Geben Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x} u$ für $x = 0$ an: $\frac{\partial}{\partial x} u(0, y) = \dots$ und berechnen Sie daraus $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} u(0, y)$.
- (b) Geben Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial y} u$ für $y = 0$ an: $\frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = \dots$ und berechnen Sie daraus $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0)$.
- (c) Geben Sie ((a) und (b) nutzend) $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} u(0, 0)$ und $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u(0, 0)$ an. Warum gilt hier der Satz von Schwarz nicht?

A4 Griechisches Alphabet - häufig benötigte Buchstaben

- (a) Geben Sie die Namen der folgenden griechischen Buchstaben an:

a) Δ

b) δ

c) Φ

d) φ

e) λ

f) μ

g) ϱ

h) σ

- (b) Schreiben Sie die griechischen Buchstaben mit den folgenden Namen:

a) gamma

b) epsilon

c) eta

d) theta

e) kappa

f) pi

g) tau

h) omega