

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

3. Woche – Kugelkoordinaten, Jacobi-Matrix, Funktionaldeterminante + Abi-Know-How = 2fach Integral

Z A1 Ein Kreiskegel wird vermessen und der Radius $r = 5$ cm und die Höhe $h = 6$ cm mit einem jeweiligen maximalen relativen Fehler von 1.5% bestimmt.

Wie groß ist der maximale absolute sowie prozentuale Volumenfehler?

Hinweis: $\text{Volumen}(\text{Zylinder}) = 3 \cdot \text{Volumen}(\text{Kreiskegel})$

Lösung: Das Volumen eines Kreiskegels kann mit

$$V = V(r, h) = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$$

bestimmt werden. Die partiellen Ableitungen sind dann

$$\frac{\partial}{\partial r} V(r, h) = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r \cdot h \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial h} V(r, h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2.$$

Mit $|\Delta r| \leq 0.015 \cdot r$ und $|\Delta h| \leq 0.015 \cdot h$ folgt

$$|\Delta V| \lesssim 0.015 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 0.045 \cdot V = \frac{9}{4} \cdot \pi \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad \frac{|\Delta V|}{V} \lesssim 4.5\%.$$

A2 Kugelkoordinaten - warm up

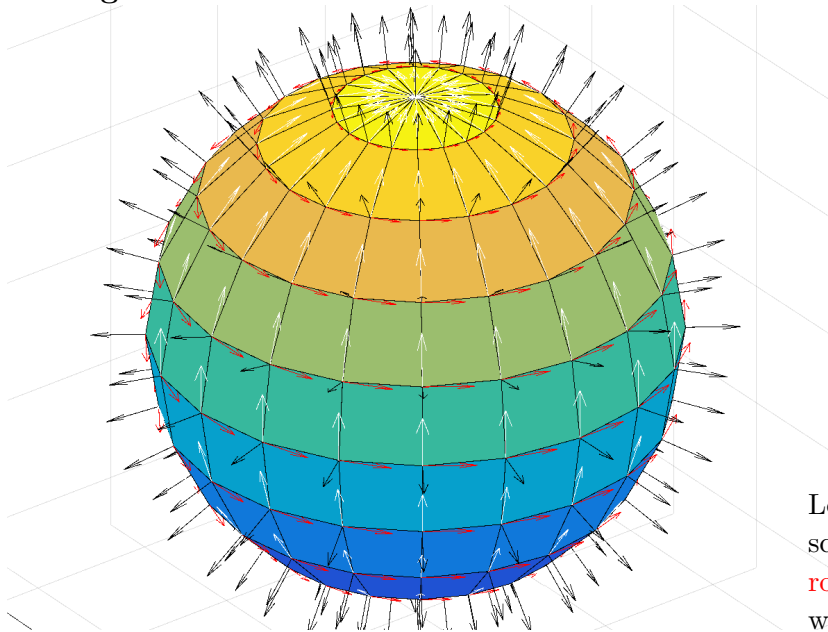
- (a) Eine Kugeloberfläche wird in Kugelkoordinaten ([Bsp 8.29](#)) mit $r = \text{konstant}$ beschrieben. Geben Sie den Bereich an, den die (Kugelkoordinaten-)Winkel φ und θ (in der VL ψ) durchlaufen.
- (b) Welche Flächen werden durch $\varphi = \text{konstant}$ (r, θ beliebig) bzw. $\theta = \text{konstant}$ (r, φ beliebig) beschrieben?

A3 Jacobi-Matrix Kugelkoordinaten, Funktionaldeterminante

- (a) Stellen Sie sich an einem beliebigen Punkt im $\mathbb{R}^3$ die Richtungen vor, in denen r bzw. φ bzw. θ zunehmen. Sind diese Richtungen orthogonal zueinander? Vergleichen Sie mit den Spalten der Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(r, \varphi, \theta)$ (s. [Bsp 8.29](#)) - sind diese orthogonal zueinander?
- (b) Rekapitulieren Sie die Determinante einer 3×3 -Matrix als Spatprodukt = Volumen des aus den Vektoren aufgespannten Spats. Was für ein Volumen erwarten Sie bei orthogonalen Vektoren (als Funktion der Beträge der Vektoren)?
- (c) Vergleichen Sie das Produkt der Beträge der Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix mit der Funktionaldeterminante, s. [Bsp 8.31](#).

Zusatz: Spannen die Spalten der Jacobi-Matrix in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem auf (passen auf Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand)?

Lösung:



Legende:

schwarze Pfeile: 1. Spalte Jacobi-Matrix

rote Pfeile: 2. Spalte Jacobi-Matrix

weiße Pfeile: 3. Spalte Jacobi-Matrix

A4 Zusatz: Jacobi-Matrix zur Linearisierung in der Regelungstechnik

In einer Regelungstechnik-Aufgabe werden Sie (bei der Betrachtung eines im Magnetfeld schwebenden Körpers) zur Linearisierung¹ der Funktion

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} x_2 \\ g - \frac{k}{m} \frac{u^2}{(x_1 + k_{\text{Fe}})^2} \end{pmatrix}$$

folgende Jacobi-Matrizen benötigen:

$$A(x_1, x_2, u) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial (x_1, x_2)} \quad \text{und} \quad b(x_1, x_2, u) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}$$

Bestimmen Sie A, b allgemein und an der Stelle $(x_1, x_2, u) = (x_1^0, 0, \sqrt{\frac{mg}{k}}(x_1^0 + k_{\text{Fe}}))$.

Hinweis: A und b sind Teilmatrizen der 'Gesamt'-Jacobi-Matrix $J_{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial (x_1, x_2, u)}$.

m, g, k, k_{Fe} und x_1^0 sind Konstanten.

¹Das lernen Sie noch.

Lösung:

$$A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial (x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\frac{k}{m} \frac{u^2}{(x_1 + k_{\text{Fe}})^3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial (x_1, x_2)} \bigg|_{\substack{x_1 = x_1^0 \\ x_2 = 0 \\ u = \dots}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{x_1^0 + k_{\text{Fe}}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\frac{k}{m} \frac{u}{(x_1 + k_{\text{Fe}})^2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \bigg|_{\substack{x_1 = x_1^0 \\ x_2 = 0 \\ u = \dots}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{x_1^0 + k_{\text{Fe}}} \sqrt{\frac{kg}{m}} \end{pmatrix}$$

A5 Zusatz: Anwendung Gradient - Richtungsableitung

Den Anstieg einer skalaren Größe U in einer bestimmten Richtung $\underline{a}$ nennt man **Richtungsableitung**. Sie wird wie folgt berechnet:

$$\frac{\partial U}{\partial \underline{a}} = \frac{1}{|\underline{a}|} \underline{a}^T \text{grad } U = \underline{e}_a^T \text{grad } U \quad (*)$$

Wäre U die geografische Höhe und $\underline{a}$ die Richtung eines Wanderweges auf der Landkarte, entspräche $\frac{\partial U}{\partial \underline{a}}$ dem Anstieg des Wanderweges.

Vollziehen Sie die Richtungsableitung (Normalenableitung) in [TET Folie 104](#) nach.

Lösung: Aus dem Kontext schließt man, dass die 'Normalenableitung' die Richtungsableitung von G in z -Richtung (bei $z = 0$) ist. Also $\underline{e}_a^T = (0 \ 0 \ 1)$ in (*) und vom Gradienten interessiert nur noch die letzte Komponente $\frac{\partial G}{\partial z}$.

A6 Fläche als Einfach- und Zweifach-Integral

Machen Sie sich klar, dass Ihr Abitur-Know-How zur Berechnung der **Fläche** unter einer Kurve

$A = \int_a^b f(x) dx$ letztendlich gleich einem Zweifachintegral ([Def. 9.1](#)) von $f(x, y) = 1$ über den Bereich $\Omega = \{(x, y) : a < x < b, 0 < y < f(x)\}$ ist. Also

$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \int_0^{f(x)} 1 dy dx$$

Damit ist auch klar, dass die Berechnung eines **Volumens** gleich einem Dreifachintegral 'über 1' ist, vgl. Normalbereich im $\mathbb{R}^3$ ([Def. 9.1](#)):

$$V = \iiint_{\Omega} f(x, y) dy dx = \iiint_{\Omega} \int_0^{f(x, y)} 1 dz dy dx$$