

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

6. Woche Kurvenintegral

Z A1 Gegeben f_x, f_y Gesucht $f(x, y)$

Gegeben ist das Gradientenfeld $\text{grad } f(x, y) = (f_x, f_y)^T$. Überprüfen Sie, ob die Integrabilitätsbedingungen, [VL 9.28](#), erfüllt sind, und ermitteln Sie jeweils die zugehörige Funktion $f(x, y)$:

(a) $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x.$

(b) $f_x = 2x + y, \quad f_y = x + 2y.$

Lösung: (a) $f(x, y) = xy + C, \quad C \in \mathbb{R},$ (b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

A2 Umlaufintegral

Geben Sie für das Beispiel [9.31](#) den Wert des Integrals an, wenn der Integrationsweg

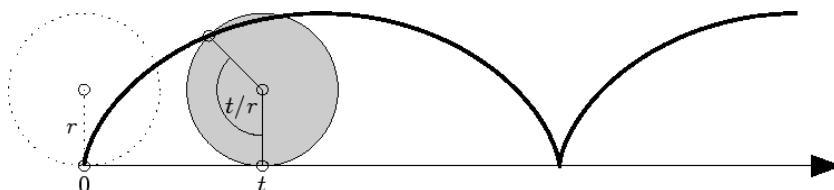
$$\gamma(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ 2 + \sin \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in [0, 2\pi]$$

ist (Begründung).

Lösung: $\oint_{\gamma} \underline{F} \cdot d\underline{s} = 0$, da dieser Integrationsweg ein **einfach zusammenhängendes Gebiet** mit $\text{rot } \underline{F} = 0$ umläuft.

Z A3 Abrollen eines Rades

Ein Rad mit Radius r rolle entlang einer Geraden. Betrachtet werde ein fester Punkt auf dem Rad.



- Leiten Sie die Kurve, die der Punkt beim Abrollen des Rades beschreibt, in Parameterdarstellung $x(t), y(t)$ her. Wählen Sie dazu als Parameter t die Strecke zwischen Startpunkt und momentanem Berührungspunkt des Rades (s. Skizze).
- Berechnen Sie die Länge der in (a) bestimmten Kurve für das einmalige Abrollen des Rades.

Lösung:

- Für den Ursprung als Startpunkt ist

$$x(t) = t + r \cos(3\pi/2 - t/r) = t - r \sin(t/r)$$

$$y(t) = r + r \sin(3\pi/2 - t/r) = r - r \cos(t/r)$$

mit $t \in [0, 2\pi r]$ eine Parametrisierung eines Kurvenbogens.

(b) Die Länge des Bogens ist

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1 - \cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2} \, dt \end{aligned}$$

Mit der Substitution $\varphi = t/r$, $r \, d\varphi = dt$ und $1 - \cos(\varphi) = 2(\sin(\varphi/2))^2$ erhält man

$$L = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos(\varphi))} \, d\varphi = r \int_0^{2\pi} 2 \sin(\varphi/2) \, d\varphi = 8r$$