

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

7. Woche Oberflächenintegral (in EMF)

A1 Flache Fläche in krummlinigen Koordinaten: Ebene 2D-Funktionaldeterminante

$$= \|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|_2$$

Betrachtet wird eine Fläche in der (x,y)-Ebene, die durch krummlinige Koordinaten (u, v) parametrisiert wird:

$$\underline{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Ermitteln Sie zunächst einmal entsprechend VL 8/3 $dA = |\det(J_T)| du dv$ unter Nutzung der Funktionaldeterminante $\det(J_T) = \begin{vmatrix} x_u & \dots \\ y_u & \dots \end{vmatrix}$.
- (b) Ermitteln Sie nun entsprechend VL 9/6 $d\underline{A} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} du dv$ und dessen Betrag $dA = |d\underline{A}|$. Vergleichen Sie mit (a)!

Lösung:

(a) $\det(J_T) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - y_u x_v$ mit $x_u = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}$
 $dA = |\det(J_T)| du dv = |x_u y_v - y_u x_v| du dv$.

(b) $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \end{pmatrix}$ somit $d\underline{A} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} du dv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_u y_v - y_u x_v \end{pmatrix} du dv$
 $dA = |d\underline{A}| = |x_u y_v - y_u x_v| du dv$.

(a)=(b): Die Bereichsintegrale im $\mathbb{R}^2$ sind quasi Oberflächenintegrale 1. Art im $\mathbb{R}^3$.

Z A2 Parametrisierung einer Fläche in Kugelkoordinaten

Sie kennen aus der Vorlesung die Parametrisierung einer Kugeloberfläche - dabei ist eine der drei Kugelkoordinaten r, φ, ϑ konstant: $r = R$, während die anderen beiden ein Intervall durchlaufen (hier ist ϑ die 'geografische Breite'):

Bsp 9.34

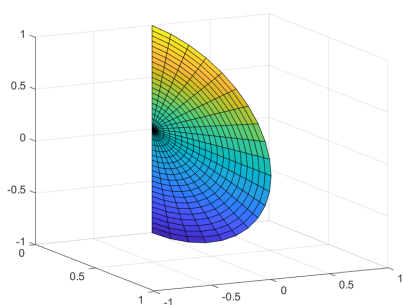
• Oberfläche der Kugel um $\underline{O}$ mit Radius R , auch *Sphäre* genannt ist in Kugelkoordinaten:

$$(\underline{r}(u,v) :=) \quad \underline{r}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ R \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ R \sin(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array}$$

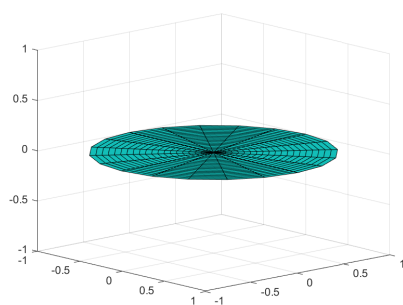
Welche Flächen werden in Kugelkoordinaten beschrieben durch

- (a) $\varphi = 0$ und $r \in [0, R], \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
- (b) $\vartheta = 0$ und $r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi]$ bzw.
- (c) $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ und $r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi]$?

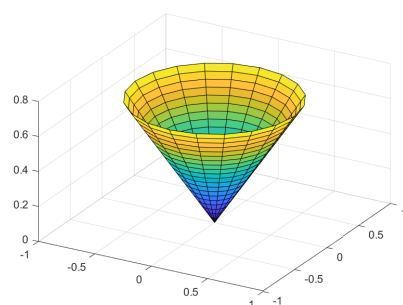
Lösung:



(a)



(b)



(c)

Z A3 Flächenintegral 2. Art in EMF

Im Fach 'Elektrische und magnetische Felder' lösen Sie Oberflächenintegrale 2. Art

$$I = \iint \underline{J} \cdot d\underline{A} \quad \text{bzw.} \quad \Phi = \iint \underline{B} \cdot d\underline{A}$$

$d\underline{A} = \underline{n} dA$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der betrachteten Fläche steht. Dabei wird meist genutzt, dass die Flussgröße $(\underline{J}, \underline{B})$ senkrecht zur (sinnvoll gewählten) Fläche ist, z.B.:

$$\iint \underline{J} \cdot d\underline{A} \stackrel{\underline{J} \parallel d\underline{A}}{=} \iint J dA \quad \text{mit } J = |\underline{J}| \text{ und } dA = |d\underline{A}|$$

Ermitteln Sie $d\underline{A}$ und dA für die Aufgaben 2.15, 2.3 und 4.17 aus dem EMF-Übungsheft nach den Regeln der Kunst (VL 9_6), indem Sie

- die Fläche durch 2 (Lauf-)Parameter beschreiben $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$
- per Kreuzprodukt aus den beiden zur Fläche tangentialen Vektoren den Vektor senkrecht zur Fläche ermitteln $d\underline{A} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v du dv$
- sich überzeugen, dass dieses $d\underline{A}$ tatsächlich parallel zur Flussgröße ist und
- den Betrag $dA = |d\underline{A}|$ betrachten, bis Sie 'sehen', dass er gleich den in EMF gebrauchten 'Abkürzungen' ist, nämlich für
 - Aufgabe 2.15: $dA = b dr$
 - Aufgabe 2.3: $dA = 2\pi r dr$ bzw.
 - Aufgabe 4.17: $dA = h dr$.

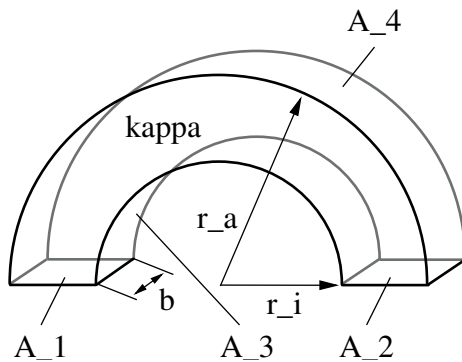


Bild zu 2.15

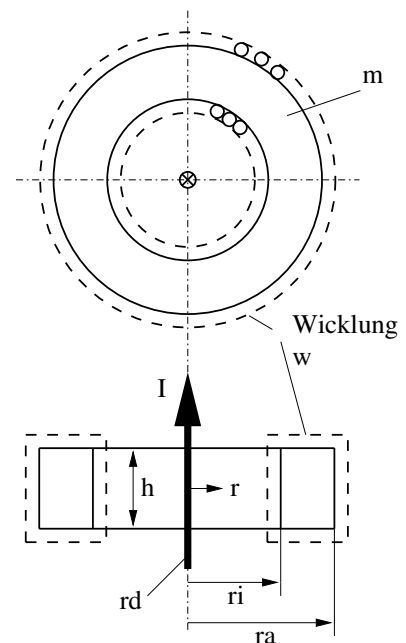


Bild zu 4.17

Lösung: Für (i) Aufgabe 2.15: Strom durch die Fläche A_2 : $I = \iint_{A_2} \underline{J} \cdot d\underline{A}$

(a) Parametrisierung der Fläche z.B. (Rotationsachse = z-Achse) $\underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ z \end{pmatrix}$ mit $\begin{matrix} r_i \leq r \leq r_a \\ 0 \leq z \leq b \end{matrix}$

(b) $d\underline{A} = \underline{r}_r \times \underline{r}_z dr dz = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dr dz = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dr dz$

(c) $d\underline{A} \parallel \underline{J}$ ✓ Strom fließt nach 'unten' heraus A_2 raus; $d\underline{A}$ zeigt im Moment noch nach 'oben' (x-Achse); Also Wahl $d\underline{A} = - \dots$

(d) $I = \iint_{A_2} \underline{J} \cdot d\underline{A} \stackrel{d\underline{A} \parallel \underline{J}}{=} \iint_{A_2} J dA$

Mit $J = J(r)$ (bei dieser Anordnung) und $dA = |d\underline{A}| = 1 dr dz$:

$$I = \int_{r=r_i}^{r_a} \int_{z=0}^b J(r) dz dr = \int_{r=r_i}^{r_a} J(r) \underbrace{b dr}_{dA}$$

Die in EMF gebrauchte 'Abkürzung' $dA = b dr$ stellt also ein bereits gelöstes inneres Integral des eigentlichen Flächen(=Doppel)-Integrals über eine Integrationsvariable (hier z) dar, von der die Flussgröße (hier J) nicht abhängt.

Z A4 Zusatz: Wohin zeigen eigentlich $\underline{r}_u$ und $\underline{r}_v$?

Sie haben in der VL gelernt, dass zur Berechnung von Flächenintegralen das Kreuzprodukt zweier Vektoren benötigt wird, nämlich von $\underline{r}_u = \frac{\partial}{\partial u} \underline{r}(u, v)$ und $\underline{r}_v = \frac{\partial}{\partial v} \underline{r}(u, v)$.

- (a) Machen Sie sich zunächst anhand der Polarkoordinaten klar, dass $\underline{r}_u$ und $\underline{r}_v$ **tangential an Parameterlinien** sind.

Hier parametrisieren r, φ die Fläche, spielen also die Rolle von u, v .

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{pmatrix}$$

- i. Zeichnen Sie von einem beliebigen Punkt in der (x, y) -Ebene ausgehend z.B. von

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{r}(r = 2, \varphi = \frac{\pi}{2}) \quad (*)$$

die sogenannte Parameterlinie $\underline{\gamma}(r) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi = \text{konstant}) \\ y(r, \varphi = \text{konstant}) \end{pmatrix}$.

Das ist die mit r parametrisierte Linie also die Kurve, entlang der r von dem gewählten Punkt aus zunimmt.

Zeichnen Sie analog $\underline{\gamma}(\varphi)$ mit $r = \text{konstant}$.

- ii. Zeichnen Sie die Vektoren $\frac{\partial}{\partial r} \underline{r}(r, \varphi)$ und $\frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{r}(r, \varphi)$, an einen beliebigen Punkt in der (x, y) -Ebene z.B. an $(*)$ und vergleichen Sie diese Vektoren mit den Richtungen, in denen r bzw. φ (von diesem Punkt aus) zunimmt.

- (b) Machen Sie sich anhand der Kugelkoordinaten klar,

- was die Parameterlinien $\underline{\gamma}(\varphi) = \underline{K}(r = \text{konstant}, \varphi, \theta = \text{konstant})$ und $\underline{\gamma}(\theta)$ sind,
- in welcher Richtung φ bzw. θ zunehmen und
- in welcher Richtung $\frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{r}(\varphi, \theta)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \theta} \underline{r}(\varphi, \theta)$ zeigen, vgl. [Bsp 9.34](#).

Übrigens sind die Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten nichts anderes als $\frac{\partial}{\partial r} \underline{K}(r, \varphi, \theta)$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{K}(r, \varphi, \theta)$ und $\frac{\partial}{\partial \theta} \underline{K}(r, \varphi, \theta)$, s. [Bsp. 8.29](#).

Merke: Sie können also zukünftig mit Hilfe der rechten Hand die Reihenfolge im Kreuzprodukt so planen, dass der Flächennormalenvektor $\underline{r}_u \times \underline{r}_v$ in die gewünschte Richtung zeigt.

Lösung:

- (a) i. r -Linie: radialer Strahl (z.B. $\varphi = \text{konstant} = \frac{\pi}{2}$), φ -Linie: Kreis (z.B. $r = 2$).
ii.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \underline{r}(r, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{r}(r, \varphi) &= \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial r} \underline{r}(2, \frac{\pi}{2}) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{r}(2, \frac{\pi}{2}) &= \begin{pmatrix} -2 \sin \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Merke: $\underline{r}_r$ und $\underline{r}_\varphi$ sind tangential an den ' r bzw. φ -Linien' (= Richtungen, in denen r bzw. φ zunimmt).