

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

7. Woche – Sektorformel, ...

A1 2D-Gauß $\Rightarrow$ Sektorformel zur Flächenberechnung

Verwenden Sie die Sektorformel [Bem. 9.50](#) zur Berechnung der Fläche des ebenen Bereiches in Aufgabe 2/20.9 d (also mit $f(P) = 1$).

Z A2 2D-Gauß zur Flächenberechnung $\Rightarrow$ 3D-Gauß zur Volumenberechnung

Der Trick bei der Sektorformel [Bem. 9.50](#) ist die Anwendung Satzes von Gauß im 2D-Fall mit Wahl eines günstigen Vektorfeldes $\underline{v}$, dessen Divergenz konstant ist. Wenden Sie diese Idee zur Volumenberechnung mit Hilfe des Satzes von Gauß in 3D an. Wie wählen Sie das Vektorfeld $\underline{v}$ in diesem Fall?

A3 Fläche in Archimedischer Spirale

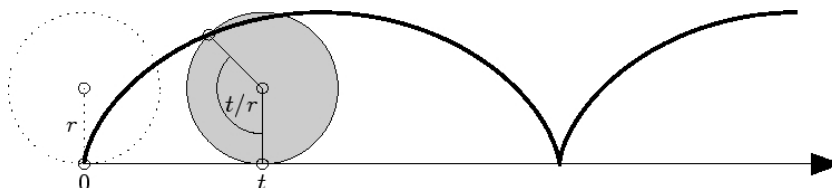
Berechnen Sie die Fläche, die von der Archimedischen Spirale

$$\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \cos(t) \\ t \sin(t) \end{pmatrix}$$

bei der ersten Umdrehung eingeschlossen wird.

Z A4 Abrollen eines Rades: Fläche unter der Zyklode

Ein Rad mit Radius $r = 1$ rolle entlang einer Geraden. Betrachtet werde ein fester Punkt auf dem Rad.



- Leiten Sie die Kurve, die der Punkt beim Abrollen des Rades beschreibt, in Parameterdarstellung $x(t), y(t)$ her. Wählen Sie dazu als Parameter t die Strecke zwischen Startpunkt und momentanem Berührungspunkt des Rades (s. Skizze).
- Berechnen Sie die Fläche unter der in (a) bestimmten Kurve für das einmalige Abrollen des Rades.

A5 Fläche 'neben' der Hyperbel

Gegeben ist die Kurve

$$\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in (-\infty, \infty).$$

- Überprüfen Sie, ob $\underline{\gamma}(t)$ der Gleichung der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ genügt und skizzieren Sie diese für positive x -Werte.
- Berechnen Sie mit Hilfe der Sektorformel die Fläche des 'Sektors', den die Kurve

$$\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in (-a, a).$$

mit dem Koordinatenursprung einschließt.

A6 Aufgabe 1.9 aus der LV Theoretische Elektrotechnik 1

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\underline{F} = x^2 \underline{e}_x + y^2 \underline{e}_y + z^2 \underline{e}_z .$$

Berechnen Sie durch Anwendung eines Integralsatzes das Integral des Vektorfeldes $\underline{F}(\underline{r})$ über die Oberfläche des durch $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$ aufgespannten Einheitswürfels (Kantenlänge: 1), dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt.

Wiederholung Volumenintegral**A7 Aufgabe 2.4 aus der LV Theoretische Elektrotechnik 1**

In einem Volumen der Gestalt einer Kugel mit dem Radius a gibt es eine Raumladungsdichte $\varrho_V = \varrho_0 \varrho^2$. Berechnen Sie die gesamte Ladung.

Hinweis: Hier wird anstelle der Kugelkoordinate r , s. [Ma-VL](#), die Variable ϱ verwendet (während ϱ_V und $\varrho_0 \cdot \text{cm}^2$ Raumladungsdichten bezeichnen).

Es greent so green ... :-)

A8 Zusatz: Green'sche Formel in der LV Theoretische Elektrotechnik 1

In [TET 1, S. 84](#) finden Sie die Green'sche Formel aus [Bem. 9.48](#) mit $u := g$ und $v := f$ wieder. Leiten Sie daraus die sogenannte 2. Green'sche Formel her:

$$\text{Green2}(f,g) = \text{Green1}(f,g) - \text{Green1}(g,f) = \dots$$