

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

9. Woche – Taylor, Jacobi-Matrix + Kettenregel, implizite Funktion, Hesse-Matrix

A1 Zusatz: Taylor, Taylor, Taylor

(a) eindimensional

- Geben Sie eine Funktion $f(x)$ an, deren Taylor-Entwicklung 2. Ordnung (um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ist.
- Geben Sie den 'Fehler' (Differenz zwischen Funktion und Taylornäherung) $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ sowie seine erste und zweite Ableitung an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ an ;-).

(b) zweidimensional

- Geben Sie eine Funktion $f(\underline{x})$ an, deren Taylor-Entwicklung 2. Ordnung (um den Entwicklungspunkt $\underline{x}_0 = \underline{0}$) $T_2(\underline{x}) = 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}$ ist.
- Geben Sie den 'Fehler' $R_2(\underline{x}) = f(\underline{x}) - T_2(\underline{x})$ sowie seinen Gradienten und seine Hesse-Matrix an der Entwicklungsstelle $\underline{x}_0 = \underline{0}$ an ;-).

Lösung:

- z.B. $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ oder $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + 7x^3$;-)
 - $R_2(0) = (f - T_2)(0) = 0$ sowie $R'_2(0) = (f - T_2)'(0) = 0$ und $R''_2(0) = (f - T_2)''(0) = 0$, s. auch Ma1 Folien 4_4 ;-)
- z.B. $f(\underline{x}) = 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} + 7x^3 + x^2y^2 + 2y^5$;-)
 - $R_2(\underline{0}) = (f - T_2)(\underline{0}) = 0$ sowie $\nabla R_2(\underline{0}) = \nabla(f - T_2)(\underline{0}) = \underline{0}$ und $H_{R_2}(\underline{0}) = H_{f-T_2}(\underline{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, s. auch Ma2 Folien 10_1 ;-)

Z A2 Who is who?

- Kettenregel: Geben Sie für das [Beispiel 10.6](#) **n**, **m** und **k** entsprechend der Nomenklatur in Satz 10.5 an.
- Implizite Funktion: Geben Sie für das [Beispiel 10.8](#) **n** und **m** entsprechend der Nomenklatur in Satz 10.11 an.

Lösung:

- n** = 2, **m** = 2, **k** = 1
- n** = 2, **m** = 1

Z A3 Kettenregel - Polarkoordinaten

Betrachtet wird die Funktion $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(r, \varphi)$, Funktion P in [Bsp. 8.29, Polarkoordinaten](#) sowie deren Umkehrfunktion $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = f^{-1}(x, y)$, s. Funktion g in [Beispiel 10.6](#).

Verwenden Sie beide Funktionen in [Satz 10.5, Kettenregel](#) und ermitteln Sie das Produkt der beiden Jacobi-Matrizen (von f und f^{-1}). Das Ergebnis steht laut Kettenregel vorher fest (Welche Funktion h stellt die Verkettung von f und f^{-1} dar? ;-)) !

Lösung:

$$J_f = \frac{\partial f}{\partial(r, \varphi)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = f^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan y/x \end{pmatrix}, \quad J_{f^{-1}} = \frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix}, \text{ s. Beispiel 10.6}$$

$$J_f \cdot J_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A4 Kartesische K. $\leftrightarrow$ Kugelkoordinaten - eindeutig?

Überprüfen Sie, in welchen Fällen die Kugelkoordinaten eine (eindeutige) Funktion der kartesischen Koordinaten sind, indem Sie den Satz über implizite Funktionen [Satz 10.11](#) anwenden!

Bringen Sie also die explizite Form $\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = K(\underbrace{r, \varphi, \theta}_{\underline{y}})$ ([Bsp. 8.29](#)) in die implizite Form

$\underline{x} - K(\underline{y}) = f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$. Überprüfen Sie nun die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen.

Lösung: Die Jacobi-Matrix $J_{f, \underline{y}} = \frac{\partial f}{\partial(r, \varphi, \theta)}$ ist gleich der Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten, s. Bsp. 8.28. Diese ist singulär, wenn die Funktionaldeterminante $\det(J_{f, \underline{y}}) = r^2 \cos \theta$ verschwindet, also für $r = 0$ oder $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ('Nord- und Süd-pol'). In allen anderen Fällen sind die Kugelkoordinaten eine eindeutige Funktion der kartesischen.

Z A5 $f(x, y) = x - y^3 = 0$ - eindeutig nach y auflösbar?

- (a) Wenden Sie den Satz über implizite Funktionen [Satz 10.11](#) an, um zu entscheiden, ob die Funktion $f(x, y) = x - y^3 = 0$ in der Umgebung des Punktes $(0, 0)$ eindeutig nach y auflösbar ist.
- (b) Zeichnen Sie die Funktion $y = x^3$ und deren Umkehrfunktion.
- (c) Stellt (b) einen Widerspruch zu Ihrem Ergebnis von (a) dar, also ein 'Gegenbeispiel' zum Satz über implizite Funktionen? ;-)

Lösung:

- (a) $(0, 0)$ ist ein gültiger Punkt, da $f(0, 0) = 0$. $J_{f,y} = f_y = -3y^2$ somit $f_y(0, 0) = 0, \Rightarrow$ Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen NICHT erfüllt.
- (b) Die Umkehrfunktion existiert: $y = x^{\frac{1}{3}}$ (auch um den Punkt $(0, 0)$).
- (c) Natürlich nicht! Das ist eben ein 'Wenn-Dann'-Satz. Er liefert nur hinreichende Bedingungen (im Gegensatz zu 'Genau-Dann-Wenn'-Sätzen, mit Bedingungen, die hinreichend UND notwendig sind).

A6 Zusatz: Anwendung Taylor(implizite Funktion)

Aus der email eines Doktoranden der Fak. ET (vom 21.3.24):

Ich bin tatsächlich auch schon über eine Frage gestolpert. Was kann ich denn machen, wenn ich eine Funktion Taylor-Approximieren will, wie z.B. die hier.

$$i(u) = i_0 \left(e^{\alpha_A \cdot f \cdot u} - e^{\alpha_C \cdot f \cdot u} \right)$$

aber mich eigentlich der Zusammenhang $u(i)$ interessiert und nicht $i(u)$, aber ich nicht die Umkehrfunktion von $i(u)$ analytisch bestimmen kann?

- (a) Formen Sie die obige Gleichung $i = \dots$ in die '=0'-Form um und überzeugen Sie sich, dass diese implizite Gleichung von $(i, u) = (i_0, 0)$ erfüllt wird.
- (b) Geben Sie die lineare Approximation der vom Doktoranden gewünschten Funktion $u(i)$ um $u_0 = 0$ an.

Lösung:

- (a) $F(i, u) := i - \dots = 0 :-)$, $i(0) = i_0 \checkmark$

(b)

$$\begin{aligned} T_1(i) &= 0 + u'|_{i=i_0} \cdot (i - i_0) = -\frac{F_i}{F_u} \Big|_{i_0, u_0} \cdot (i - i_0) = \frac{1}{i_0 f(\alpha_A e^{\alpha_A f u} - \alpha_C e^{\alpha_C f u})} \Big|_{u_0=0} \cdot (i - i_0) \\ &= \frac{1}{i_0 f(\alpha_A - \alpha_C)} \cdot (i - i_0) \end{aligned}$$

Z A7 Zusatz: Tailor your ODE!

Sie wollen eine **gewöhnliche Differentialgleichung** (DGL) finden, deren Lösungen auf von Ihnen vorgegebenen Kurven verlaufen.

- (a) Wählen Sie eine mit $\Phi(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$ parametrisierte Kurvenschar (z.B. Schar der Kreis-Kurven: $x^2 + y^2 = C$).
- (b) Geben Sie die DGL dieser Kurvenschar an.
Bemerkung: Das ist quasi das inverse Problem zur Lösung von DGLn (Gegeben und Gesucht vertauscht).

Lösung:

- (a) Z.B. Schar der Höhenlinien eines Sattels (Hyperbeln) $z = x^2 - y^2 = \Phi(x, y) = C$.
- (b) DGL: $\Phi_x + \Phi_y y' = \underbrace{2x}_p - \underbrace{2y}_q y' = 0$.

Z A8 Hesse-Matrix pdf? - denkste!

Gegeben ist die Hesse-Matrix

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

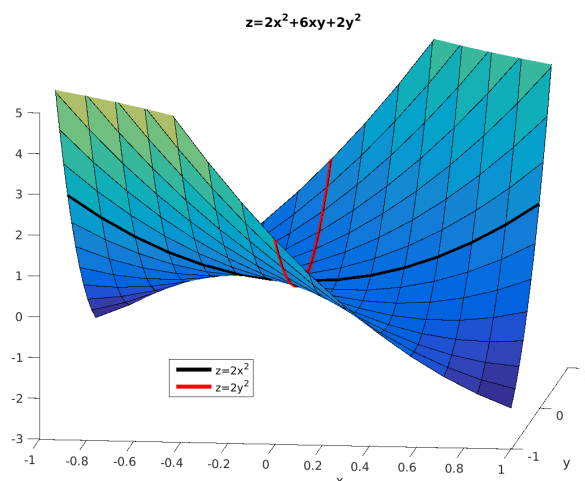
Überlegen Sie sich, ob die zugehörige quadratische Form

$$z = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = 2x^2 + 6xy + 2y^2 \quad \text{der Einfachheit halber seien hier } x_0 = y_0 = 0$$

positiv definit (pdf) ist, in dem Sie

- (a) den Schnitt von z mit der Ebene $y = 0$ skizzieren.
- (b) den Schnitt von z mit der Ebene $x = 0$ skizzieren.
- (c) jetzt einen Tipp über die positive Definitheit abgeben und
- (d) nun $z(1, -1)$ ausrechnen, sowie
- (e) die Eigenwerte der Hesse-Matrix berechnen.

Warum reicht es zur Entscheidung über ein lokales Maximum/Minimum nicht aus, nur die zweiten Ableitungen f_{xx}, f_{yy} (also nur die Diagonalelemente der Hesse-Matrix) anzugucken?



Lösung:

