

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. Lösungen)

11. Woche – Regression, DGL 1. Ordnung, eindeutige Lsg.

A1 $T_1(\underline{x}) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$ Iterationsvorschrift

Gegeben ist eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$.

- (a) Geben Sie die Gleichung der linearen Approximation (also Taylor-Entwicklung 1. Ordnung) von F im Punkt $(\underline{x}_0, F(\underline{x}_0))$ an: $T_1(\underline{x}) = \dots$, vgl. [VL 10.1](#).
- (b) Bestimmen Sie die 'Nullstelle' dieser linearen Approximation, indem Sie $T_1(\underline{x}) \stackrel{!}{=} 0$ setzen und nach $\underline{x}$ umstellen (die Jacobimatrix sei in $\underline{x}_0$ invertierbar).
- (c) Vergleichen Sie mit der Iterationsvorschrift in [VL 10.26](#)!

Lösung:

(a)

$$T_1(\underline{x}) = F(\underline{x}_0) + J_F(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)$$

(b)

$$T_1(\underline{x}) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{x}_0 - J_F^{-1}(\underline{x}_0)F(\underline{x}_0)$$

(c) Auffallende Ähnlichkeit! Offenbar bestimmt die Iterationsvorschrift

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - J_F^{-1}(\underline{x}^k)F(\underline{x}^k)$$

die Nullstelle der linearen Approximation von F , $T_1(\underline{x})$ im k -ten Iterationspunkt $\underline{x}^k$.

A2 Zusatz: Klausuraufgabe aus der LV Prozessidentifikation

Für das statische Modell

$$y = f(u) = a_1 + a_2 u^2$$

wurden folgende Messwerte erfasst:

u_i	-1	0	1	2
y_i	2	10	6	4

Bestimmen Sie die Parameter a_1 und a_2 mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate!

Geben Sie Ihren Rechenweg mit Zwischenergebnissen nachvollziehbar an!

Lösung:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = f(u) = 7 - u^2$$

Z A3 $y'(x) = f(x)$ vs. $y'(x) = f(y(x))$

Sie haben in der [VL 11.1](#) die allgemeine Form der DGL 1. Ordnung $y'(x) = f(x, y(x))$ kennen gelernt. Welchen der beiden Spezialfälle $y'(x) = f(x)$ oder $y'(x) = f(y(x))$ können Sie bereits lösen und wie?

Lösung: $y' = f(x)$ ist zu lösen mit

$$y(x) = \int f(x) \, dx + C \quad \text{bzw.} \quad y(x) = \int_{x_0}^x f(x') \, dx' + y(x_0) \quad \text{AWA.}$$

Integration quasi als 'Umkehroperation' zur Differentiation.

A4 Zusatz: Wiederholung Kurvenintegrale: Aufgabe 1.4 aus der LV Theoretische Elektrotechnik 1

Gegeben ist die Vektorfunktion $\underline{F}(\underline{r})$ sowie die orientierten Wege W_1 und W_2 :

$$\underline{F}(\underline{r}) = y\underline{e}_x - x\underline{e}_y + (x + y + z)\underline{e}_z$$

$$W_1 : \underline{r}(t) = \underline{e}_x + t\underline{e}_z \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$W_2 : \underline{r}(t) = \cos(2\pi t)\underline{e}_x + \sin(2\pi t)\underline{e}_y + t\underline{e}_z \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$a) \int_{W_1} \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} \quad b) \int_{W_1} \underline{F}(\underline{r}) \times d\underline{r} \quad c) \int_{W_2} \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} \quad d) \int_{W_2} \underline{F}(\underline{r}) \times d\underline{r}.$$

Lösung: a) $\frac{3}{2}$ b) $-\underline{e}_x$ c) $\frac{1}{2} - 2\pi$ d) $-\pi\underline{e}_x + (1 - \pi)\underline{e}_y$