

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

12. Woche – DGL 1. Ordnung: separabel / linear / eindeutige Lsg.

A1 Für Fortgeschrittene: Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

- (a) Welche Lösung hätte die Anfangswertaufgabe (AWA) 24.9 b mit der Anfangsbedingung $y(1) = -1$?

Erfüllt diese AWA die Bedingung für Eindeutigkeit der Lösung aus [Satz 11.7](#)?

Lösung: Sowohl die Lösung $y(x) = \frac{1}{4}(x+C)^2 - 1$, mit $C = -1$ (für $x \geq 1$, da $y \geq -1$!) als auch die Lösung $y \equiv -1$ erfüllen diese AWA. Die Lösung ist nicht eindeutig.

Die DGL erfüllt bei $y = -1$ **nicht** Bedingung im Satz 11.7 2: die Wurzelfunktion $\sqrt{y+1}$ hat dort keine beschränkte Ableitung (f hat keine beschränkte partielle Ableitung bzgl. y).

- (b) Erfüllt die AWA 24.9 g die Bedingung aus [Satz 11.7](#)? Welchen Wert nimmt die Lösung für $x = 2$ an?

Lösung: Die AWA mit der Anfangsbedingung $x_0 = 0, y_0 = -1$ erfüllt die Bedingungen in Satz 11.7. Jedoch ist das durch den Satz garantierte Existenzintervall endlich: die Lösung dieser AWA $y(x) = -(1 - \frac{2}{3}x^3)^{-1/2}$ existiert nur für $x < \sqrt[3]{3/2}$. Sie hat eine 'endliche Fluchtzeit', heißt geht bereits für $x = \sqrt[3]{3/2}$ gegen unendlich und existiert eben nicht mehr für $x = 2$.

- Z (c) Bei Aufgabe 24.12 b) $xy' + (y+1)\ln x = 0, \quad y(1) = -1$ 'sieht' man sofort eine Lösung $y \equiv -1$ die auch noch die Anfangsbedingung erfüllt. Erfüllt die DGL in einem Intervall um $x = 1$ Bedingung im [Satz 11.7](#) und ist damit die 'gesehene' Lösung sicher die Einzige?

Lösung: Die DGL $y' = -(y+1)\ln(x)/x$ erfüllt überall die Bedingungen im Satz 11.7 (nur in $x = 0$ nicht). Um den gegebenen Anfangswert $x = 1$ sind die Bedingungen erfüllt und damit ist die 'gesehene' Lösung (in einem Intervall um $x = 1$) sicher die Einzige.

A2 Was ist eigentlich die Relaxationszeit?

Gegeben ist die folgende DGL aus der LV Theoretische Elektrotechnik, Folie 159:

- Einerseits Maxwell: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \rightarrow \operatorname{div} \vec{J} = \frac{\kappa \cdot \rho_V}{\varepsilon_0} \neq 0$
- Andererseits Stationarität: $\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0$ (Widerspruch?)
- Differentialgleichung für die Volumenladungsdichte ρ_V

$$\rho_V \dot{+} \frac{\kappa}{\varepsilon_0} \cdot \rho_V = 0$$

- (a) Geben Sie die Lösung der DGL für eine gegebene Anfangsvolumenladungsdichte $\varrho_V(0) = \varrho_{V0} \neq 0$ an und skizzieren Sie diese.
- (b) Geben Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} \varrho_V(t)$ an.
- (c) Geben Sie die Zeit t an, für die gilt: $\varrho_V(t) = \varrho_{V0} e^{-1}$ und markieren Sie diese in der Skizze aus (a). Hinweis: $e^{-1} \approx 37\%$.
- (d) In der LV EMF haben Sie (für Sie in dem Moment noch nicht verstehbar) erfahren, dass $\tau = \frac{\varepsilon}{\kappa}$ die sogenannte Relaxationszeit ist. Erklären Sie den Begriff jetzt unter Verwendung von (c).

Lösung:

– Lösung: $\rho_V(t) = \rho_{V0} \cdot e^{-\kappa/\varepsilon_0 \cdot t}$

– Für Kupfer: $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$ und $\kappa_{\text{Cu}} = 58 \times 10^6 \text{ S m}^{-1} \rightarrow$ Zeitkonstante zur Erreichung des Gleichgewichtes:

$$\tau_{\text{Cu}} = \frac{\varepsilon_0}{\kappa_{\text{Cu}}} \cong 1.5 \times 10^{-19} \text{ s}$$



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

TET: Stationäres Elektrisches Strömungsfeld
Theoretische Elektrotechnik und EMV / H.G. Krauthäuser
Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Folie

- (a)
- (b) $\lim_{t \rightarrow \infty} \varrho_V(t) = 0$.
- (c) $\varrho_V(t) = \varrho_{V0} e^{-1}$ für $t = \frac{\varepsilon}{\kappa}$.
- (d) Die Relaxationszeit ist die Zeitkonstante τ der Exponentialfunktion $e^{-t/\tau}$ und gibt die Zeit an, bei der eine Größe (die obiger DGL gehorcht) auf ca. 37% des Startwertes abgeklungen ist.
Hinweis: Gebräuchlicher ist die Formulierung: die Zeit, bei der die Lösung der inhomogenen DGL $\tau \dot{\varrho} + \varrho = K$ (die sogenannte Sprungantwort) 63% des Endwertes erreicht hat (das ist die 63%-Regel zum Ablesen von Zeitkonstanten) ...

Z A3 Klassifikation DGL 1. Ordnung: separabel, linear

Klassifizieren Sie die Aufgaben U2/24.15 a-f,n:

Welche DGL sind separabel (Gruppe I) und welche sind linear (Gruppe II).

Fertigen Sie ein Venn-Diagramm an.

A4 Wahr oder falsch

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

- ☐ Die DGL $y'(t) = f(x, y(t))$ ist linear, wenn f linear in x ist.
- ☐ Die DGL $y'(t) = f(x, y(t))$ ist linear, wenn f linear in $y(t)$ ist.
- ☐ Die DGL $y'(t) = f(x, y(t))$ ist linear, wenn $f = a(x)y(t) + g(x)$ ist.

Z A5 Fahrplan: Lösung inhomogener DGL 1. Ordnung (mit Anfangsbedingung)

Ordnen Sie die folgenden Arbeitsschritte in der richtigen Reihenfolge:

- (Anpassen des konstanten Faktors C der homogenen Lösung, so dass die Anfangsbedingung erfüllt ist),
- Überlagerung von homogener und partikulärer Lösung zur 'allgemeinen' Lösung
- Bestimmung der homogenen Lösung z.B. mit Trennung der Variablen (TdV)
- Bestimmung einer partikulären Lösung durch Variation der Konstanten (VdK).

Z A6 Allgemein statt Konkret: VdK

In der VL sieht man am konkreten [Bsp. 11.20](#) wie sich die DGL zur Bestimmung der 'variieren' Konstanten durch Aufheben gewisser Terme ergibt. Schreiben Sie dies allgemein auf, in dem Sie

- (a) Den Ansatz $y_p(x) = K(x) \cdot y_h(x)$ ableiten,
- (b) in die lineare DGL $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ einsetzen und
- (c) berücksichtigen, dass $y_h(x)$ die homogene DGL $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ erfüllt.

Lösung:

(a) $y_p(x) = K(x) \cdot y_h(x) \Rightarrow y'_p(x) = K'(x)y_h(x) + K(x)y'_h(x)$

(b) $a(x)[K'(x)y_h(x) + K(x)y'_h(x)] + b(x)K(x)y_h(x) = c(x)$

(c) $a(x)K'(x)y_h(x) + K(x)\underbrace{[a(x)y'_h(x) + b(x)y_h(x)]}_{=0, \text{ da homogene Lsg.}} = c(x) \Rightarrow K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)} \frac{1}{y_h(x)}$