

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

13. Woche – homogen/inhomogen, Bernoulli, d'Alembert, Wronski

Z A1 Zusatz: Allgemein statt Konkret: Bernoulli-DGL

In der VL sieht man am konkreten [Bsp. 11.25](#) dass der Ansatz $u(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ zu einer linearen DGL führt. Schreiben Sie dies allgemein auf, in dem Sie

- (a) Den Ansatz $u(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ ableiten,
- (b) darin $y'(t)$ mit der rechten Seite der Bernoulli-DGL der Form $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)(y(t))^\alpha$ ersetzen und
- (c) die lineare DGL für $u(t)$ angeben.

Z A2 Zusatz: Potentialfunktion, implizite Funktion, exakte DGL

Wir haben im Laufe des Semesters quasi drei mal Ähnliches gemacht: bei Kurvenintegralen 2. Art spielt eine Potentialfunktion $\Phi \stackrel{z.B.}{=} \Phi(x, y)$ eine Rolle, s. [Satz 9.28](#); bei impliziten Funktion geht es um ein $f = 0$ (wir wollen hier mal $\Phi(x, y) = 0$ verwenden), s. [Satz 10.11](#); und bei exakten DGL geht es um $\Phi(x, y) = c$, s. [VL 11.4](#).

Erstellen Sie sich eine Übersicht zu diesen drei Anwendungen quasi ein und derselben Sache.

Thema	Fragestellung	Gegeben	Gesucht	Zusammenhang
Kurvenintegral				
Implizite Funktion				
Exakte DGL				

- A3** Die DGL $\frac{y''}{y} = k^2$ ¹ führt zur homogenen DGL $y'' - k^2 y = 0$ deren Lösung in zwei verschiedenen Formen angegeben werden kann ([Bsp. 11.38](#)):

$$i) y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} \quad \text{oder} \quad ii) y(x) = C_1 \sinh(kx) + C_2 \cosh(-kx)$$

Die Konstanten der homogenen Lösung c_1, c_2 bzw. werden C_1, C_2 werden durch Anfangs- bzw. Randbedingungen festgelegt.

Welche der beiden Varianten i) oder ii) würden Sie wählen, wenn

- (a) eine Anfangsbedingung lautet: $y(0) = 0$,
- (b) eine Anfangsbedingung lautet: $y(\infty) = 0$?

Hinweis: Mit der günstigen Wahl steht eine der Konstanten sofort fest (ohne die zweite Anfangs- oder Rand-Bedingung zu betrachten).

Z A4 d'Alembert → weitere homogene Lösung

$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$ besitzt die Lösung $y_1(x) = e^x$. Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode von d'Alembert eine weitere Lösung. Wie lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL?

¹Diese DGL taucht in Ma4 und in der Theoretischen Elektrotechnik bei der Lösung partieller DGL wieder auf.

Z A5 Bestimmen Sie die partikuläre Lösung zu [Bsp. 11.20](#) (harmonisch angeregtes RC-Glied)

$$RC \cdot u'(t) + u(t) = \cos(\omega t + \phi_q), \quad u_h(t) = D e^{-t/(RC)}$$

mit Hilfe des Ansatzes nach Art der rechten Seite (also **nicht so** :-)).

Z A6 Wronski-Determinante

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, ob die Funktionen

$$y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = e^{2x} \text{ und } y_3(x) = x e^{2x}$$

linear unabhängig sind. Geben Sie $W(0)$ an.

(b) Sind die Funktionen $\cos(x), \sin(x)$ linear abhängig?

(c) Sind die Funktionen $\cos(x), \sin(x), \cos(x + \varphi)$ linear abhängig?

(d) Wählen Sie 3 Funktionen, die Sie für linear abhängig halten und betrachten deren Wronski-Determinante.

A7 Theoretische Elektrotechnik: Lösung der Radialgleichung

Gegeben ist die (für kugelsymmetrische Probleme der Elektrostatik) genutzte Differentialgleichung, s. [Radialgleichung](#), für die Funktion $R(r)$:

$$r^2 R'' + 2r R' = l(l+1)R(*)$$

(a) Klassifizieren Sie die DGL (Ordnung, linear/nichtlinear, konstante Koeffizienten oder nicht).

(b) Überprüfen Sie (durch einsetzen), ob

$$R_1(r) = r^l \quad \text{und} \quad R_2(r) = r^{-(l+1)}$$

die DGL (*) lösen.

(c) Kann es weitere (von den Lösungen in (b)) linear unabhängige Lösungen der DGL (*) geben? (Begründung!).

A8 Zusatz: Bestimmen Sie die Lösungen λ der Gleichung

$$\lambda^2 = i\omega\mu\kappa \quad \text{mit } \omega, \mu, \kappa \in \mathbb{R}_+$$

und geben Sie unter Verwendung dieser $e^{\lambda x}$ an.