

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

13. Woche – homogen/inhomogen, Bernoulli, d'Alembert, Wronski

Z A1 Zusatz: Allgemein statt Konkret: Bernoulli-DGL

In der VL sieht man am konkreten [Bsp. 11.25](#) dass der Ansatz $u(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ zu einer linearen DGL führt. Schreiben Sie dies allgemein auf, in dem Sie

- (a) Den Ansatz $u(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ ableiten,
- (b) darin $y'(t)$ mit der rechten Seite der Bernoulli-DGL der Form $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)(y(t))^\alpha$ ersetzen und
- (c) die lineare DGL für $u(t)$ angeben.

Lösung:

- (a) $u(t) = (y(t))^{1-\alpha} \Rightarrow u'(t) = (1-\alpha)(y(t))^{-\alpha} y'(t)$
- (b) $u'(t) = (1-\alpha)(y(t))^{-\alpha} y'(t) = (1-\alpha)(y(t))^{-\alpha} [a(t)y(t) + b(t)(y(t))^\alpha]$
- (c) $u'(t) = (1-\alpha)[a(t)\underbrace{(y(t))^{1-\alpha}}_{=u(t)} + b(t)] = (1-\alpha)[a(t)u(t) + b(t)]$

Z A2 Zusatz: Potentialfunktion, implizite Funktion, exakte DGL

Wir haben im Laufe des Semesters quasi drei mal Ähnliches gemacht: bei Kurvenintegralen 2. Art spielt eine Potentialfunktion $\Phi \stackrel{z.B.}{=} \Phi(x, y)$ eine Rolle, s. [Satz 9.28](#); bei impliziten Funktion geht es um ein $f = 0$ (wir wollen hier mal $\Phi(x, y) = 0$ verwenden), s. [Satz 10.11](#); und bei exakten DGL geht es um $\Phi(x, y) = c$, s. [VL 11.4](#).

Erstellen Sie sich eine Übersicht zu diesen drei Anwendungen quasi ein und derselben Sache.

Lösung:

Thema	Gegeben	Fragestellung	Gesucht	Zusammenhang
Kurvenintegral	$\underline{F}$	$\int_{\underline{a}}^{\underline{b}} \underline{F} \, d\underline{s} \stackrel{?}{=} \Phi(\underline{b}) - \Phi(\underline{a})$	Φ	$\underline{F} = \text{grad } \Phi$ wenn $\text{rot } \underline{F} = \underline{0}$
Implizite Funktion	$\Phi(x, y) = 0$	$y \stackrel{?}{=} y(x)$	ja/nein bzw. $y'(x)$	$y'(x) = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y}$ wenn $\Phi_y \neq 0$
Exakte DGL	$p + qy'(x) = 0$	Existiert implizite Lsg.?	$\Phi(x, y) = c$	$p = \Phi_x, q = \Phi_y$ wenn $p_y = q_x$

Oder kompakter

Kurvenintegral: $\text{grad } \Phi \Rightarrow \Phi$

Implizite Funktion: $\Phi = 0 \Rightarrow \text{DGL} \Rightarrow y'$

Exakte DGL: $\text{DGL} \Rightarrow \Phi = c$

A3 Die DGL $\frac{y''}{y} = k^2$ ¹ führt zur homogenen DGL $y'' - k^2 y = 0$ deren Lösung in zwei verschiedenen Formen angegeben werden kann (Bsp. 11.38):

$$i) y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} \quad \text{oder} \quad ii) y(x) = C_1 \sinh(kx) + C_2 \cosh(-kx)$$

Die Konstanten der homogenen Lösung c_1, c_2 bzw. C_1, C_2 werden durch Anfangs- bzw. Randbedingungen festgelegt.

Welche der beiden Varianten i) oder ii) würden Sie wählen, wenn

- (a) eine Anfangsbedingung lautet: $y(0) = 0$,
- (b) eine Anfangsbedingung lautet: $y(\infty) = 0$?

Hinweis: Mit der günstigen Wahl steht eine der Konstanten sofort fest (ohne die zweite Anfangs- oder Rand-Bedingung zu betrachten).

Lösung:

- (a) ii): $y(0) = C_1 \sinh(k0) + C_2 \cosh(-k0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C_2 = 0$,
- (b) i): $y(\infty) = c_1 e^{k\infty} + c_2 e^{-k\infty} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow c_1 = 0$.

Z A4 d'Alembert → weitere homogene Lösung

$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$ besitzt die Lösung $y_1(x) = e^x$. Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode von d'Alembert eine weitere Lösung. Wie lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL?

Lösung: Für $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$ erhalten wir

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$$

und somit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \text{also} \quad y_1(x) = e^x \quad \text{und} \quad y_2(x) = ?$$

Da wir eine Lösung haben, wenden wir d'Alembert an:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \cdot v(x) = e^x \cdot v(x) \\ y_2'(x) &= e^x \cdot (v(x) + v'(x)) \\ y_2''(x) &= e^x \cdot (v(x) + 2v'(x) + v''(x)) \\ &\Rightarrow e^x (v(x) + 2v'(x) + v''(x) - 2v(x) - 2v'(x) + v(x)) = v''(x) e^x = 0 \\ &\Rightarrow v''(x) = 0 \Rightarrow v(x) = Ax + B \Rightarrow v(x) = x \\ &\Rightarrow y_2(x) = x e^x \end{aligned}$$

Es folgt also als allgemeine Lösung

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x = (C_1 + C_2 x) \cdot e^x$$

¹Diese DGL taucht in Ma4 und in der Theoretischen Elektrotechnik bei der Lösung partieller DGL wieder auf.

Z A5 Zusatz:

Bestimmen Sie die partikuläre Lösung zu [Bsp. 11.20](#) (harmonisch angeregtes RC-Glied)

$$RC \cdot u'(t) + u(t) = \cos(\omega t + \phi_q), \quad u_h(t) = D e^{-t/(RC)}$$

mit Hilfe des Ansatzes nach Art der rechten Seite (also **nicht so** :-)).

Lösung: Rechte Seite ist Winkelfunktion, $\lambda = \omega i \neq \lambda_1 = -\frac{1}{RC}$, also $s = 0$. Ansatz lautet

$$u_p(t) = a \cos(\omega t + \phi_q) + b \sin(\omega t + \phi_q), \quad u'_p(t) = -a\omega \sin(\omega t + \phi_q) + b\omega \cos(\omega t + \phi_q)$$

und ergibt

$$\begin{aligned} \cos(\omega t + \phi_q) (RCb\omega + a) + \sin(\omega t + \phi_q) (-RCa\omega + b) &\stackrel{!}{=} \cos(\omega t + \phi_q) \\ \Rightarrow b = RC\omega a, \quad a = \frac{1}{1 + (RC\omega)^2} &\Rightarrow b = \frac{RC\omega}{1 + (RC\omega)^2} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$u(t) = D e^{-t/(RC)} + \frac{1}{1 + (RC\omega)^2} (\cos(\omega t + \phi_q) + RC\omega \sin(\omega t + \phi_q)).$$

Z A6 Zusatz: **Wronski-Determinante**

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, ob die Funktionen

$$y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = e^{2x} \text{ und } y_3(x) = x e^{2x}$$

linear unabhängig sind. Geben Sie $W(0)$ an.

(b) Sind die Funktionen $\cos(x), \sin(x)$ linear abhängig?

(c) Sind die Funktionen $\cos(x), \sin(x), \cos(x + \varphi)$ linear abhängig?

(d) Wählen Sie 3 Funktionen, die Sie für linear abhängig halten und betrachten deren Wronski-Determinante.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\det[W(x)] &= \det \left[\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{2x} & x e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} & e^{2x} + 2x e^{2x} \\ e^{-x} & 4e^{2x} & 4e^{2x} + 4x e^{2x} \end{pmatrix} \right] \\
&= \det \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 2 & 2x+1 \\ 1 & 4 & 4x+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \right] = 9e^{3x} \neq 0 \\
W(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det[W(0)] = 9 \neq 0
\end{aligned}$$

A7 Theoretische Elektrotechnik: Lösung der Radialgleichung

Gegeben ist die (für kugelsymmetrische Probleme der Elektrostatik) genutzte Differentialgleichung, s. [Radialgleichung](#), für die Funktion $R(r)$:

$$r^2 R'' + 2r R' = l(l+1)R(*)$$

- (a) Klassifizieren Sie die DGL (Ordnung, linear/nichtlinear, konstante Koeffizienten oder nicht).
- (b) Überprüfen Sie (durch einsetzen), ob

$$R_1(r) = r^l \quad \text{und} \quad R_2(r) = r^{-(l+1)}$$

die DGL (*) lösen.

- (c) Kann es weitere (von den Lösungen in (b)) linear unabhängige Lösungen der DGL (*) geben? (Begründung!).

Lösung:

- (a) DGL 2. Ordnung, linear, nicht-konstante Koeffizienten.
- (b) R, R', R'' einsetzen $\rightarrow \checkmark$.
 Alternativ: Ansatz $R = r^\lambda$ für [Eulersche-DGL](#) einsetzen,
 $\rightarrow$ Lösungen der charakteristischen Gleichung: $\lambda_1 = l, \lambda_2 = -(l+1)$.
- (c) Nein, da lineare DGL 2. Ordnung genau 2 linear unabhängige Lösungen hat, s. Satz 11.33 (VL 11_5).

A8 Zusatz: Bestimmen Sie die Lösungen λ der Gleichung

$$\lambda^2 = i\omega\mu\kappa \quad \text{mit } \omega, \mu, \kappa \in \mathbb{R}_+$$

und geben Sie unter Verwendung dieser $e^{\lambda x}$ an.

Lösung: S. Theoretische Elektrotechnik: Lösung der [Diffusionsgleichung](#).