

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)

14. Woche – PDGL 2. Ordnung

- A1** Im Fach Theoretische Elektrotechnik (TET) werden Sie dieses [PDGL-Beispiel](#) betrachten.
- (a) Klassifizieren Sie in dem Beispiel die PDGL (homogen/inhomogen) und die Zusatzbedingungen (homogen/inhomogen).
 - (b) Welche Aufgabe aus dem Ma4-Übungsprogramm behandelt eine PDGL mit der gleichen Klassifizierung?

Kurzlösung: [Übung 12](#), [A5](#)

- A2** Im Fach Theoretische Elektrotechnik werden Sie die sogenannte [Diffusionsgleichung](#) der Magneto-Quasistatik kennen lernen. Klassifizieren Sie den PDGL-Typ (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch).

Kurzlösung: parabolisch

Separationsansatz in TET-Aufgaben

- A3** Diese Aufgaben entsprechen den TET1-Übungsaufgaben 7.1 bis 7.3
- (a) Überführen Sie die PDGL $\Delta\Psi(x, y, z) + k^2\Psi(x, y, z) = 0$ in drei gewöhnliche Differentialgleichungen jeweils von x, y, z , wobei k eine Konstante ist.
 - (b) Überführen Sie die PDGL $\Delta\Psi(\rho, \varphi, z) + k^2\Psi(\rho, \varphi, z) = 0$ in drei gewöhnliche Differentialgleichungen jeweils von ρ, φ, z , wobei k eine Konstante ist.
 - (c) Überführen Sie die PDGL $\Delta\Psi(r, \vartheta, \varphi) = 0$ in drei gewöhnliche Differentialgleichungen jeweils von r, ϑ, φ .

Hinweis:

Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten $\Delta = \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)}_{=\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, vgl. [Bem. 15.15](#),

[Laplace in Polarkoordinaten](#),

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten $\Delta = \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)}_{=\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}} + \frac{1}{r^2} \left(\underbrace{\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right)}_{=\frac{1}{\tan \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$

Kurzlösung:

(a) $\psi(x, y, z) = F(x)G(y)H(z)$

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = -k_x^2 F, \text{ wobei } k_x \text{ eine Konstante ist.}$$

$$\frac{d^2 G}{dy^2} = -k_y^2 G, \text{ wobei } k_y \text{ eine Konstante ist.}$$

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = -k_z^2 H, \text{ wobei } k_z \text{ eine Konstante ist.}$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

(b) $\psi(\rho, \varphi, z) = F(\rho)G(\varphi)H(z)$

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = -k_z^2 H, \text{ wobei } k_z \text{ eine Konstante ist.}$$

$$\frac{d^2 G}{d\varphi^2} = -m^2 G, \text{ wobei } m \text{ eine Konstante ist.}$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dF}{d\rho} \right) - m^2 F + (k^2 - k_z^2) \rho^2 F = 0$$

(c) $\psi(r, \vartheta, \varphi) = F(r)G(\vartheta)H(\varphi)$

$$\frac{d^2 H}{d\varphi^2} = -m^2 H, \text{ wobei } m \text{ eine Konstante ist.}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) = k^2 F, \text{ wobei } k \text{ eine Konstante ist.}$$

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dG}{d\vartheta} \right) - \frac{m^2 G}{\sin \vartheta} = -k^2 G \sin \vartheta$$

In der TET wird diese Konstante $k = l(l+1)$ 'günstig gewählt' zur Verwendung von sogenannten [Kugelflächenfunktionen](#).

PDGL 2. Ordnung: Schwingung einer Saite

A4 Die gedämpften Schwingungen einer eingespannten Saite der Länge ℓ werden durch die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} + 2c u_t = a^2 u_{xx}$$

beschrieben. Dabei stellt $2c$ den auf die Längeneinheit bezogenen Dämpfungsfaktor dar; es gelte $0 < \ell c < a\pi$ (schwache Dämpfung).

Unter Verwendung des Separationsansatzes ermittle man die Lösung der Differentialgleichung, die folgenden Anfangs- und Randbedingungen genügt:

$$u(x, 0) = f(x) = A \sin \frac{\pi}{\ell} x, \quad u_t(x, 0) = g(x) = 0, \quad u(0, t) = u(\ell, t) = 0.$$

Kurzlösung:

$$u(x, t) = A e^{-ct} \left(\cos \omega_1 t + \frac{c}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \sin \frac{\pi}{\ell} x \quad \text{mit } \omega_1 := \sqrt{a^2 \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 - c^2}.$$

