



Technische
Universität
Dresden

Fakultät Physik

Physikalisches Grundpraktikum

Versuch: **GS**

Aktualisiert: am 10. April 2026

Gekoppelte Schwingung

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung	2
2 Grundlagen	2
2.1 Das Physikalische Pendel	2
2.2 Gekoppelte Pendel	2
3 Experimentelle Aufgabenstellung	4
4 Experimenteller Aufbau	4
5 Auswertung	5
6 Platzanweisung	6
7 Fragen	8

1 Aufgabenstellung

Das Wissen über physikalische Pendel und Schwingungen soll durch diesen Versuch vertieft werden. Messen Sie die Schwebungsfrequenz der gekoppelten Pendel als Funktion der Kopplungslänge direkt und indirekt. Die Messergebnisse sind mit den theoretisch berechneten Werten zu vergleichen.

2 Grundlagen

2.1 Das Physikalische Pendel

Mit dem Trägheitsmoment $J_A = \int_K r^2 dm$ des Körpers K bezüglich der Drehachse A und dem Abstand s_A zwischen Drehachse und Massenmittelpunkt lautet die Differentialgleichung für das physikalische Pendel der Gesamtmasse m :

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mg \cdot s_A}{J_A} \cdot \sin \varphi \approx -\frac{mg \cdot s_A}{J_A} \cdot \varphi \quad (1)$$

Die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ gilt für kleine Winkel $\varphi \ll 1$. Diese Differentialgleichung wird durch den bekannten Ansatz gelöst:

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{2 \cdot \pi^2}{T} = \frac{mg \cdot s_A}{J_A}$$

Hierbei ist ω die Kreisfrequenz der freien Schwingung.

2.2 Gekoppelte Pendel

Für kleine Auslenkungen φ_1 und φ_2 der Pendel 1 und 2 lauten die Bewegungsgleichungen der gekoppelten gleichartigen Pendel bei Vernachlässigung der Masse der Kopplungsfeder und jeglicher Dämpfung:

$$J_A \cdot \ddot{\varphi}_1 = -D\varphi_1 - D^* \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (2a)$$

$$J_A \cdot \ddot{\varphi}_2 = -D\varphi_2 - D^* \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2b)$$

$D = m \cdot g \cdot s_A$ ist das *Richtmoment* des freien Pendels und $D^* = k \cdot l^2$ das *Richtmoment* der Kopplungsfeder.

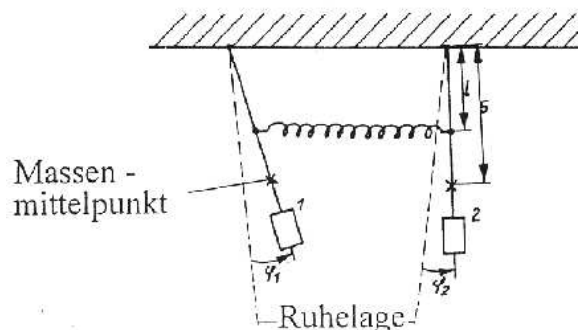


Abb. 1: schematischer Versuchsaufbau

Wir legen die Anfangsbedingungen so fest, dass das Pendel am Anfang nur ausgelenkt wird, aber nicht angestoßen:

$$\varphi_1(0) = A \quad \varphi_2(0) = B \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \quad (3)$$

Damit ergeben sich die Lösungen für die einzelnen Pendel aus den gekoppelten Bewegungsgleichungen (Gl. 2a und 2b):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \left[(A + B) \cdot \cos(\omega \cdot t) + (A - B) \cdot \cos(\omega' \cdot t) \right] \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \left[(A + B) \cdot \cos(\omega \cdot t) - (A - B) \cdot \cos(\omega' \cdot t) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{J_A}} \quad \text{und} \quad \omega' = \frac{2\pi}{T'} = \sqrt{\frac{D + 2D^*}{J_A}} \quad (5)$$

Für bestimmte Anfangsbedingungen erhält man die beiden *Fundamentalschwingungen*:

- $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0$: Daraus folgt $A = B$ und es ergibt sich die *gleichsinnige Fundamentalschwingung* mit der Kreisfrequenz ω , bei der beide Pendel so schwingen, als wäre die Kopplung nicht vorhanden.
- $\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0$: Daraus folgt $A = -B$ und es ergibt sich die *gegensinnige Fundamentalschwingung* mit der Kreisfrequenz ω' .

Die *Schwebungsschwingung* erhält man, indem ein Pendel in der Ruhelage festgehalten wird und das zweite Pendel zur Zeit $t = 0$ bei maximaler Auslenkung losgelassen wird ($\varphi_2(0) = \varphi_0$), also für $A = 0$ und $B = \varphi_0$ oder umgekehrt. Daraus ergeben sich die Funktionen $\varphi_{1/2}(t)$ der beiden Pendel während der Schwebungsschwingung:

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_0}{2} \cdot [\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega' \cdot t)] \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \frac{\varphi_0}{2} \cdot [\cos(\omega \cdot t) + \cos(\omega' \cdot t)] \quad (6)$$

Durch Differenzen und Summen der Fundamentalschwingungsfrequenzen ausgedrückt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \sin\left(\frac{\omega' - \omega}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega + \omega'}{2} \cdot t\right) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega' - \omega}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega + \omega'}{2} \cdot t\right) \end{aligned} \quad (7)$$

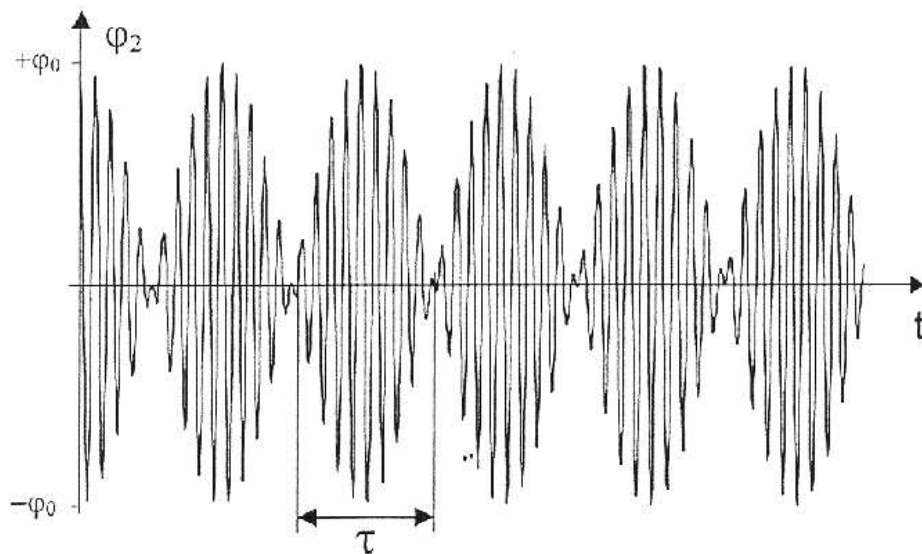


Abb. 2: Prinzip der Schwebungsschwingung eines Pendels mit der Schwebungsdauer τ

Nach Gleichung (7) führen beide Pendel Schwingungen mit dem arithmetischen Mittel der Fundamentalschwingungsfrequenzen aus, während sich die Amplituden periodisch mit $\frac{\omega' - \omega}{2}$ ändern.

Die *Schwebungsdauer* τ ist der Abstand zweier Nulldurchgänge der Amplitude eines Pendels. Aus der Bedingung $\frac{\omega' - \omega}{2} \cdot \tau = \pi$ ergibt sich die *Schwebungsfrequenz* als Differenz der Fundamentalschwingungsfrequenzen:

$$\frac{1}{\tau} = f_S = \frac{\omega' - \omega}{2\pi} = \frac{1}{T'} - \frac{1}{T} \quad (8)$$

Mit (5) kann man die Schwebungsfrequenz aus den Richtmomenten bzw. den entsprechenden Werten für g , k , m , s_A und l errechnen:

$$f_S = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega' - \omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2 \cdot k \cdot l^2}{m \cdot g \cdot s_A}} - 1 \right) \quad (9)$$

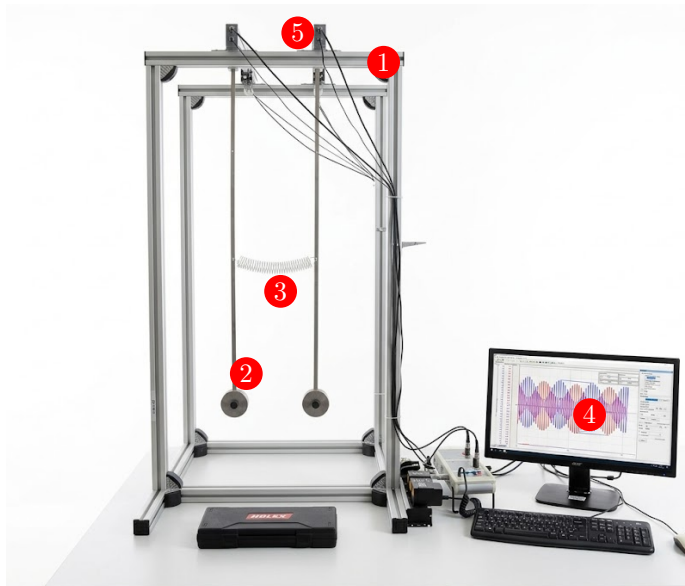
3 Experimentelle Aufgabenstellung

Am Versuchsplatz sind zwei physikalische Pendel aufgebaut, die in einer gemeinsamen Ebene schwingen können. Die Pendel werden durch eine Schraubenfeder (Federkonstante k) gekoppelt, die in variablem Abstand l von der Drehachse jedes Pendels befestigt werden kann (siehe Abb. 1).

1. Justieren Sie die ungekoppelten Pendel durch Verschieben einer Tariermutter auf gleiche Schwingungsdauer, indem die Schwingungsdauern gemessen werden oder die Phasengleichheit der gegensinnigen Schwingungen der beiden ungekoppelten Pendel am inneren Umkehrpunkt über längere Zeit kontrolliert wird.
2. *direkte Methode*: Messen Sie τ direkt und berechnen Sie die Schwebungsfrequenz $f_{S,1}$.
3. *indirekte Methode*: Messen Sie für verschiedene Abstände l die Schwingungsdauer T der gleichsinnigen, die Schwingungsdauer T' der gegensinnigen Fundamentalschwingung und bestimmen Sie daraus die Schwebungsfrequenz $f_{S,2}$.
4. *theoretische Methode*: Bestimmen Sie die Federkonstanten k mittels dynamischer Methode (Wie?). Entnehmen Sie die Parameter m und s_A aus Tab. 1, die vom Versuchsplatz abhängen. Berechnen Sie damit den theoretischen Wert für die Schwebungsfrequenz $f_{S,3}$.

4 Experimenteller Aufbau

In Abb. 3 ist der reale Versuchsaufbau zu sehen. Für die Aufnahme der Messreihe wird das Cassy-Messsystem verwendet, welches mit zwei Hall-Sonden verbunden ist, die die Schwingung der Pendel aufnehmen. Die Oberfläche des Cassy-Systems ist in Abb. 4 zu sehen.



Versuchsaufbau:

1. Rahmen mit Aufhängung
2. Pendel
3. Kopplungsfeder
4. PC mit Cassy-Messsystem
5. Hall-Sonde

Abb. 3: Versuchsaufbau der gekoppelten Pendel mit Datenerfassung.

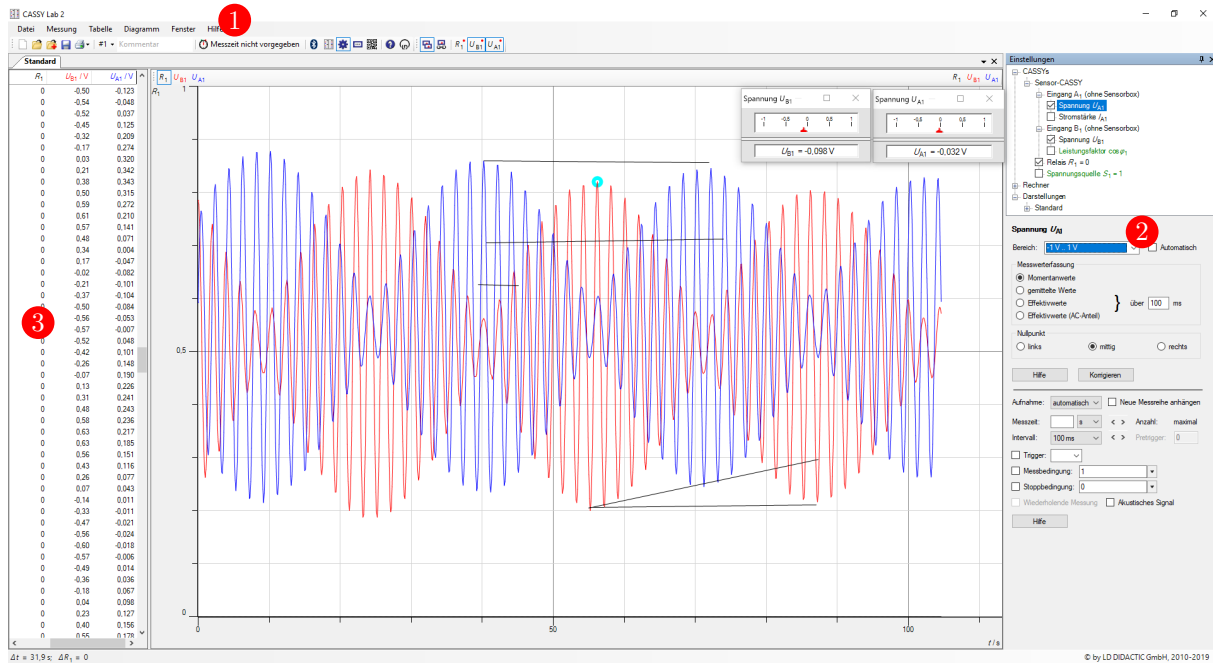


Abb. 4: Oberfläche Cassy-Messsystem

1. Messreihe Starten/Stoppen
2. Messbereich einstellen
3. Werte der Messreihe

5 Auswertung

Die Schwebungsfrequenz $f_{S,1}$ folgt *direkt* aus dem gemessenen τ . $f_{S,2}$ erhält man *indirekt* nach (8) aus T und T' . Weiterhin benutzt man den theoretischen Zusammenhang (9) um $f_{S,3}$ zu berechnen. Die auf drei verschiedenen Wegen ermittelten Schwebungsfrequenzen sind als Funktion der Kopp-lungslänge l in einem gemeinsamen Diagramm darzustellen. Die relativen Unsicherheiten von f_S sind für die indirekte Methode (Gl. (8)) und die theoretische Methode (Gl. (9)) in Abhängigkeit vom Federabstand l zu bestimmen.

6 Platzanweisung

Hinweise zur Versuchsdurchführung

1. Nehmen Sie das *Cassy-Messsystem* in Betrieb. (Nutzer: Praktikum, Passwort: Physik\$\$\$)
2. *ungekoppeltes Pendel*: Überprüfen Sie die Schwingungsdauern der einzelnen Pendel über 100 Schwingungen. Entfernen Sie die Feder komplett für diese Messung, damit der Einfluss der Masse der Feder entfällt. Bei Abweichungen die verstellbare Pendelmass nach Rücksprache mit der Versuchsleitung verschieben.
3. *gekoppeltes Pendel*: Messen Sie für *drei* verschiedene Koppellängen l mit Hilfe des Cassy-Systems:
 - a) die Schwebungsdauer τ (Gesamtzeit t_S für 5 bis 10 Schwebungen messen)
 - b) Schwingungsdauer T der gleichsinnigen Fundamentalschwingung (Gesamtzeit t_{50} für 50 Schwingungen messen)
 - c) Schwingungsdauer T' der gegensinnigen Fundamentalschwingung (Gesamtzeit t'_{50} für 50 Schwingungen messen)

Hinweis zur Durchführung: Bringen Sie die Koppelfedern sorgfältig so an, dass die Pendelspitzenlager nicht in der Führung über der Hallsonde bewegt werden und immer an den durch Ringmarken gekennzeichneten Positionen verbleiben.

4. Messen Sie die Federkonstante k der Kopplungsfeder mittels dynamischer Methode.

Hinweis zur Durchführung: Verwenden Sie eine hinreichend große Masse. Dabei darf die Feder allerdings nicht zu weit gedehnt werden, da sich die Federkonstante bei großen Auslenkungen (u. U. bleibend) ändert.

Zur Benutzung des Cassy-Messsystems

- Überprüfung der Schwingungsdauern: Wählen Sie im Cassy-Datenerfassungsprogramm eine geeignete Achseneinteilung für die Hallspannung (z. B. zwischen $-0,5$ und $0,5$ V). Stellen Sie mit Hilfe des Offsetreglers an den Hallsonden für die Ruhelage der Pendel etwa 0 V ein. Die Datenaufnahme sollte zunächst bei $0,1$ s liegen. Arbeiten Sie immer im Modus „Automatische Aufnahme“.
- Bestimmung der Schwebungsdauer: Bei sehr kleinen Schwebungsdauern ist das Zeitintervall der Datenaufnahmen auf $0,05$ s zu reduzieren.
- Zur Ermittlung der Zeiten t_S , t_{50} und t'_{50} : Entweder lesen Sie die Zeiten aus der tabellarischen Darstellung der Hallspannungen ab, oder Sie nutzen das Messtool „Markierung setzen – Differenz Messen“. Es besteht auch die Möglichkeit, die Aufzeichnung der Daten per Trigger zu starten.

Auswertung

1. Drucken Sie die erhaltenen Messdiagramme für die gleichsinnige bzw. die gegensinnige Fundamentalschwingung und für die Schwebung jeweils zur *größten* Koppellänge l mit der entsprechenden Beschriftung (**Alt+T**) aus.
2. Berechnen Sie die Schwebungsfrequenz:
 - a) $f_{S,1}$: *direkt* aus der der Schwebungsdauer τ

- b) $f_{S,2}$: *indirekt* aus den Schwingungsdauern der beiden Fundamentalschwingungen T und T'
- c) $f_{S,3}$: *theoretisch* aus der Federkonstante k und den Parametern des Versuchplatzes (s. Tab. 1)

$$f_{S,1/2/3} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{T'} - \frac{1}{T} = \frac{1}{T} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2 \cdot k \cdot l^2}{m \cdot g \cdot s_A}} - 1 \right)$$

3. Stellen Sie die mit den drei verschiedenen Methoden ermittelten Schwebungsfrequenzen (einschließlich Messunsicherheiten) in einem *gemeinsamen* Diagramm dar.
4. Geben Sie für alle drei Methoden die *relativen* Unsicherheiten an.

Messplatz	Hallsondennummer	m/kg	s_A/cm	l/cm
a	026 & 030	$1,322 \pm 0,005$	$87,0 \pm 0,5$	$28,0 \pm 0,2$
b	023 & 025	$1,316 \pm 0,005$	$87,2 \pm 0,5$	$52,8 \pm 0,2$
c	027 & 022	$1,310 \pm 0,005$	$87,2 \pm 0,5$	$77,8 \pm 0,2$
d	028 & 024	$1,318 \pm 0,005$	$87,1 \pm 0,5$	

Tab. 1: Parameter für die einzelnen Messplätze und Koppellängen an den drei Ringmarken

Hinweise für das Protokoll

(a) Bestimmung der Federkonstante

m/g	$T_{100,\text{Feder}}/\text{s}$	$T_{\text{Feder}}/\text{s}$	$k/\text{N m}^{-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(b) Bestimmung der Schwebungsfrequenz

l/cm	t_{50}/s	T/s	t'_{50}/s	T'/s	t_S/s	τ/s	$f_{S,1}/\text{Hz}$	$f_{S,2}/\text{Hz}$	$f_{S,3}/\text{Hz}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tab. 2: Empfohlene Tabellen für das Protokoll

7 Fragen

1. Wodurch ist eine mechanische Schwingung gekennzeichnet?
2. Wie sind im Experiment die Fundamentalschwingungen und die reine Schwebung anzuregen?
3. Wie könnte man feststellen, ob die Pendel bei der Bestimmung von T' genau in Gegenphase schwingen?
4. Wie kann man die Federkonstante k der Kopplungsfeder statisch und dynamisch bestimmen?
5. Wie erhält man den Massenmittelpunkt eines Pendels?
6. Die beiden Pendel sind in einem Metallrahmen aufgehängt. Wenn man ein Pendel zur Schwingung anstößt, beginnt nach längerer Zeit auch das zweite Pendel zu schwingen, selbst wenn die Pendel *nicht* durch eine Feder verbunden sind. Wie ist das zu erklären?
7. Da die Aufhängeplatte für den Federangriff (Masse m_F) für die Kopplungsfeder auf dem Pendel verschoben werden muss, hängt auch die Schwingungsdauer T von l ab. Versuchen Sie herzuleiten, dass der Einfluss der Verschiebung der Muffe auf die Frequenz $\bar{f}$ in erster Näherung erfasst wird, wenn die rechte Seite der Gleichung (9) mit dem folgenden Faktor multipliziert wird:

$$\left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m_M}{m_P} \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(1 + \frac{\omega^2}{g} \right) \right]$$

Autorenschaft

Diese Versuchsanleitung wurde in ihrer ursprünglichen Form von C. Blochwitz erstellt und von E. Hieckmann, J. Kelling, F. Lemke, S. Majewsky bearbeitet. Aktuelle Änderungen werden von der Praktikumsleitung durchgeführt.

Literatur

- [1] C. Gerthsen, *Physik*, Springer-Verlag, Berlin (1997).
- [2] I. Waldemar, D. Geschke, E. Horst, *Physikalisches Praktikum*, Teubner-Verlag, Stuttgart, Leipzig (1998).
- [3] A. Recknagel, *Physik: Schwingungen, Wellen, Wärmelehre*, Technik-Verlag, Berlin (1990).